وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

الفصل الدراسي الثاني

العبيكان Obeikan
McGraw Hill Education

يوزع مجانًا ولا يباع

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الطبعة التجريبية
١٤٣٢ هـ - ٢٠١١ م

الرياضيات

الصف الثاني الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

أعدّ النسخة العربية : شركة العبيكان للأبحاث والتطوير

التحرير والمراجعة والمواءمة

د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
صلاح بن عبد الله الزيد
عبدالحكيم عبدالله سليمان
عمر محمد أبو غليون
خلود عبدالحفيظ لوباني
حسان عبدالله الحوراني

التعريب والتحرير اللغوي

نخبة من المتخصصين

إعداد الصور

د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

Original Title:

Algebra2 © 2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Berchie Holliday, Ed. D
Ruth M.Casey

Contributing Authors
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Prof. Bob McCollum

Gifted and talented
Shelbik.cole

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry Cummins

Mathematical Fluency
Robert m . capraro

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
Releah cassett lent
Lynn T. Havens

www.obeikaneducation.com

www.glencoe.com

العبيكان Obeikan

McGraw Hill Education

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw Hill Companies. Inc. © 2008.

www.sscbrisbane.com

بسم الله الرحمن الرحيم

تم تجهيز هذه المادة بجهود زملائكم في برزبن
أحمد بن بدر الغليق
علي بن بدر الغليق

إشراف
عادل بن علي اليوسف
عبدالعزيز الشهري

2012

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التربية والتعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

الفهرس

الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

الفصل 6 المتتابعات والمتسلسلات

الفهرس

الفصل 7 الاحتمالات

الفصل 8 حساب المثلثات

الفصل

5

العلاقات والدوال النسبية
Rational Functions and Relations

فيما سبق:

درست حل المعادلات التربيعية: بالتحليل إلى العوامل، وبيانيًا.

والآن:

- أتعرّف العبارات النسبية.
- أبسّط عبارات نسبية.
- أمثّل دوال نسبية بيانيًا.
- أحل مسائل التغير الطردي والتغير المشترك والتغير العكسي.
- أحل معادلات ومتباينات نسبية.

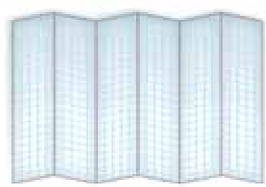
لماذا؟

سفر: يمكن استعمال الدوال النسبية للتعبير عن المسافة، والزمن، والسرعة، عند السفر بالسيارة، أو بالطائرة، فإذا أردت الوصول إلى وجهة معينة في زمن معين، يمكن أن تستعمل العلاقات النسبية للتوصل إلى السرعة المناسبة التي يجب أن تسير بها لتحقق هدفك.

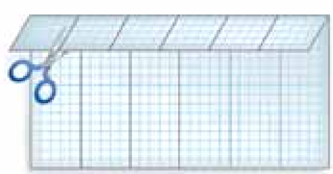
المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوال النسبية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوال النسبية، مبتدئًا بورقة رسم بياني.

1 **اطو** الورقة عرضيًا ست طيات متساوية.



2 **اطو** الحافة العلوية للورقة بعرض 2cm، ثم قصّ 6 أشرطة مبتدئًا من الحافة حتى خط الطيّ العرضي.



3 **اكتب** عناوين الدروس على الجهات الخارجية العلوية لأشرطة الطيات الست، واستعمل الجهات الداخلية للطيات لكتابة التعريفات والملاحظات.

التهيئة للفصل الخامس

تشخيص الاستعداد. هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي: انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حُلّ كل معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة.

1) $\frac{5}{14}=\frac{1}{3}x$

2) $\frac{1}{8}m=\frac{7}{3}$

3) $\frac{8}{5}=\frac{1}{4}k$

4) $\frac{10}{9}p=7$

5) **شاحنات:** استهلكت شاحنة $\frac{1}{3}$ سعة خزان وقودها الممتلئ في إحدى الرحلات، فإذا بقي في الخزان 80 لترًا من الوقود عند نهاية الرحلة، فما سعة خزان وقود الشاحنة؟

بسّط كل عبارة مما يأتي:

6) $\frac{3}{4}-\frac{7}{8}$

7) $\frac{8}{9}-\frac{7}{6}+\frac{1}{3}$

8) $\frac{9}{10}-\frac{4}{15}+\frac{1}{3}$

9) $\frac{10}{3}+\frac{5}{6}+3$

10) **دقيق:** تستعمل علياء $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لعمل كعكة الفراولة، في حين تستعمل $1\frac{1}{2}$ كوب لعمل كعكة الفانيليا. كم كوبًا من الدقيق تحتاج لعمل الكعكتين؟

حُلّ كل تناسب مما يأتي:

11) $\frac{9}{12}=\frac{p}{36}$

12) $\frac{9}{18}=\frac{6}{m}$

13) $\frac{2}{7}=\frac{5}{k}$

14) **تسوق:** تسوق أحمد من متجر في موسم التخفيضات، فاشترى ملابس بقيمة 550 ريالًا، ودفع مبلغ 440 ريالًا بعد الخصم. إذا أراد شراء ملابس أخرى من المتجر نفسه بقيمة 350 ريالًا وبنسبة التخفيض نفسها، فكم يدفع؟

مراجعة سريعة

مثال 1

حُلّ المعادلة: $\frac{9}{11}=\frac{7}{8}r$ ، واكتب الحل في أبسط صورة.

$$\frac{9}{11}=\frac{7}{8}r$$

$$\frac{72}{11}=7r \quad \text{بضرب كلا الطرفين في العدد 8}$$

$$\frac{72}{77}=r \quad \text{بقسمة كلا الطرفين على العدد 7}$$

بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 77 ,72 هو 1، فإن الحل في أبسط صورة.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$.

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right)-\frac{5}{6}\left(\frac{2}{2}\right) \quad \text{المضاعف المشترك الأصغر للمقامات 6 ,4 ,3 هو العدد 12}$$

$$=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}-\frac{10}{12} \quad \text{بالتبسيط}$$

$$=\frac{3}{12} \quad \text{بالجمع، ثم بالطرح}$$

$$=\frac{3\div 3}{12\div 3}=\frac{1}{4} \quad \text{بالتبسيط}$$

مثال 3

حُلّ التناسب: $\frac{5}{8}=\frac{u}{11}$.

$$\frac{5}{8}=\frac{u}{11} \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$5(11)=8u \quad \text{بالضرب التبادلي}$$

$$55=8u \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\frac{55}{8}=u \quad \text{بقسمة كلا الطرفين على 8}$$

بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 8 ,55 هو 1، فإن الناتج في أبسط صورة. $u=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}$

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

5-1

ضرب العبارات النسبية وقسمتها
Multiplying and Dividing Rational Expressions

فيما سبق:

درست تحليل كثيرات الحدود.

والآن:

- أتعرف العبارات النسبية.
- أبسّط عبارات نسبية.
- أبسّط كسورًا مركّبة.

المفردات:

العبارة النسبية
rational expression

الكسر المركّب
complex fraction

لماذا؟

يستطيع الغواصون الغوص إلى أعماق تزيد على 33 ft باستعمال أجهزة التنفس تحت الماء، وتعطي الدالة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d-33}$ أكبر زمن يمكن للغواص قضاؤه في هذه الأعماق، بحيث يبقى قادرًا على الصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف، حيث $T(d)$ زمن الغوص بالدقائق، d العمق بالأقدام.

تبسيط العبارات النسبية تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود مثل: $\frac{1700}{d-33}$ "عبارة نسبية".

بما أن المتغيرات في الجبر تمثل أعدادًا حقيقية في أغلب الأحيان، فإن العمليات على العبارات النسبية تشبه العمليات على الأعداد النسبية. وكما في تبسيط الكسور فإنه عند تبسيط العبارات النسبية يتم قسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر (GCF) لهما.

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} = \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}^{1}}{(x-5)\cancel{(x-1)}_{1}} = \frac{x-3}{x-5}$$

$\boxed{GCF = x-1}$

$$\frac{8}{12} = \frac{2\cdot\cancel{4}^{1}}{3\cdot\cancel{4}_{1}} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{GCF = 4}$

إرشادات للدراسة

GCF

الرمز (GCF) يمثل اختصارًا لـ: Greatest Common Factor (العامل المشترك الأكبر)

مثال 1 تبسيط عبارة نسبية

a) بسّط العبارة: $\frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)}$

$$\frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)} = \frac{5x(x+3)(x+1)}{(x-6)(x+3)(x-3)}$$ بتحليل كل من البسط والمقام إلى العوامل

$$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)} \cdot \frac{\cancel{(x+3)}^{1}}{\cancel{(x+3)}_{1}}$$ باختصار العوامل المشتركة

$$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)}$$ بالتبسيط

b) متى تكون العبارة في الفرع (a) غير معرّفة؟

بما أن مقام العبارة في الفرع (a) يحلّل إلى العوامل بالشكل: $(x-6)(x+3)(x-3)$،
فإن قيم x التي تجعل المقام صفرًا هي $6, -3, 3$.
و لذا تكون العبارة غير معرّفة عند $x = 6, x = -3, x = 3$.

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة مما يأتي، وحدد متى تكون غير معرّفة:

(1A $\frac{4y(y-3)(y+4)}{y(y^2-y-6)}$

(1B $\frac{2z(z+5)(z^2+2z-8)}{(z-1)(z+5)(z-2)}$

مثال 2 على اختبار

ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2(x^2-5x-14)}{4x(x^2+6x+8)}$ غير معرّفة؟

A $-2, -4$ **C** $0, -2, -4$ **B** $-2, 7$ **D** $0, -2, -4, 7$

اقرأ فقرة الاختبار:

تريد إيجاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا.

حل فقرة الاختبار:

إحدى القيم التي تجعل المقام $4x(x^2+6x+8)$ يساوي صفرًا هي $x=0$، لذا، يمكن حذف البديلين A و B . والآن، حلّل المقام إلى العوامل.

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$، إذن المقام يساوي $4x(x+2)(x+4)$.

وبما أن المقام يساوي صفرًا عندما $x=0$، أو $x=-2$ أو $x=-4$ فإن الإجابة الصحيحة هي C .

إرشادات للاختبار

يمكنك في بعض الأحيان اختصار الوقت بحذف بعض البدائل غير المنطقية، ثم الاختيار من بين البدائل المتبقية.

تحقق من فهمك

2) ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)}$ غير معرفة؟

A $5, 0, -2$ **B** $5, -2$ **C** $0, -2, -6$ **D** $5, -2, -6$

في بعض الأحيان، يمكنك إخراج العدد 1– كعامل مشترك من البسط أو المقام للمساعدة في تبسيط العبارة النسبية.

مثال 3 تبسيط عبارة نسبية بإخراج 1– كعامل مشترك

بسّط كل عبارة مما يأتي:

a) $\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$

$$\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}=\frac{w(4w-3y)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$$ بالتحليل إلى العوامل

$$=\frac{w(-1)\cancel{(3y-4w)}^{1}(w+y)}{\cancel{(3y-4w)}_{1}(5w+y)}$$ $4w-3y=-1(3y-4w)$

$$=\frac{(-w)(w+y)}{5w+y}$$ بالتبسيط

b) $\frac{x^3-y^3}{y-x}$

$$\frac{x^3-y^3}{y-x}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y-x}$$ بالتحليل إلى العوامل

$$=\frac{(-1)\cancel{(y-x)}^{1}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(y-x)}_{1}}$$ $x-y=-1(y-x)$

$$=-x^2-xy-y^2$$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة مما يأتي:

3A) $\frac{(xz-4z)}{z^2(4-x)}$ **3B)** $\frac{8a^3-b^3}{b-2a}$

تستعمل طريقة ضرب الكسور أو قسمتها في ضرب العبارات النسبية أو قسمتها؛ فعندما تضرب كسرين فإنك تضرب البسط في البسط والمقام في المقام. أما عند قسمة كسرين فإنك تضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه، أو تضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه.

الضرب

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{15}{4}=\frac{\cancel{2}^{1}\cdot\cancel{3}^{1}\cdot 5}{\cancel{3}_{1}\cdot 3\cdot\cancel{2}_{1}\cdot 2}=\frac{5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}$$

القسمة

$$\frac{3}{5}\div\frac{6}{35}=\frac{3}{5}\cdot\frac{35}{6}=\frac{\cancel{3}^{1}\cdot\cancel{5}^{1}\cdot 7}{\cancel{5}_{1}\cdot 2\cdot\cancel{3}_{1}}=\frac{7}{2}$$

والجدول الآتي يلخصُ قواعد ضرب العبارات النسبية وقسمتها:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لضرب عبارتين نسبيتين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإن $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

قسمة العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لقسمة عبارة نسبية على أخرى اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$، فإن

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

مثال 4 ضرب عبارات نسبية وقسمتها

بسّط كل عبارة مما يأتي:

a) $\frac{6c}{5d}\cdot\frac{15cd^2}{8a}$

$$\frac{6c}{5d}\cdot\frac{15cd^2}{8a}=\frac{2\cdot 3\cdot c\cdot 5\cdot 3\cdot c\cdot d\cdot d}{5\cdot d\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot a}$$ بالتحليل إلى العوامل

$$=\frac{\cancel{2}^{1}\cdot 3\cdot c\cdot\cancel{5}^{1}\cdot 3\cdot c\cdot\cancel{d}^{1}\cdot d}{\cancel{5}_{1}\cdot\cancel{d}_{1}\cdot\cancel{2}_{1}\cdot 2\cdot 2\cdot a}$$ باختصار العوامل المشتركة

$$=\frac{3\cdot 3\cdot c\cdot c\cdot d}{2\cdot 2\cdot a}$$ بالتبسيط

$$=\frac{9c^2d}{4a}$$ بالتبسيط

b) $\frac{18xy^3}{7a^2b^2}\div\frac{12x^2y}{35a^2b}$

$$\frac{18xy^3}{7a^2b^2}\div\frac{12x^2y}{35a^2b}=\frac{18xy^3}{7a^2b^2}\cdot\frac{35a^2b}{12x^2y}$$ بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot 5\cdot 7\cdot a\cdot a\cdot b}{7\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot y}$$ بالتحليل إلى العوامل

$$=\frac{\cancel{2}^{1}\cdot\cancel{3}^{1}\cdot 3\cdot\cancel{x}^{1}\cdot\cancel{y}^{1}\cdot y\cdot y\cdot 5\cdot\cancel{7}^{1}\cdot\cancel{a}^{1}\cdot\cancel{a}^{1}\cdot\cancel{b}^{1}}{\cancel{7}_{1}\cdot\cancel{a}_{1}\cdot\cancel{a}_{1}\cdot\cancel{b}_{1}\cdot b\cdot 2\cdot\cancel{2}_{1}\cdot\cancel{3}_{1}\cdot x\cdot\cancel{x}_{1}\cdot\cancel{y}_{1}}$$ باختصار العوامل المشتركة

$$=\frac{3\cdot 5\cdot y\cdot y}{2\cdot b\cdot x}$$ بالتبسيط

$$=\frac{15y^2}{2bx}$$ بالتبسيط

إرشادات للدراسة

العوامل المشتركة

تأكد من اختصار العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام.

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(4A $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$

(4B $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$

(4C $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$

(4D $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$

في بعض الأحيان عليك أن تحلّل البسط أو المقام أو كليهما قبل تبسيط ناتج ضرب عبارات نسبية أو قسمتها.

مثال 5 عبارات نسبية تتضمن كثيرات حدود في كل من بسطها ومقامها

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(a $\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6}$

$\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6} = \frac{(x-8)(x+2)}{(x-8)(x-8)} \cdot \frac{x-8}{(x+3)(x+2)}$ بالتحليل إلى العوامل

$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x-8)}}\overset{1}{\cancel{(x+2)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-8)}}\underset{1}{\cancel{(x-8)}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{x-8}}}{(x+3)\underset{1}{\cancel{(x+2)}}}$ باختصار العوامل المشتركة

$= \frac{1}{x+3}$ بالتبسيط

(b $\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18}$

$\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18} = \frac{x^2-16}{12y+36} \cdot \frac{y^2-3y-18}{x^2-12x+32}$ بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$= \frac{(x+4)(x-4)}{12(y+3)} \cdot \frac{(y-6)(y+3)}{(x-4)(x-8)}$ بالتحليل إلى العوامل

$= \frac{(x+4)\overset{1}{\cancel{(x-4)}}}{12\underset{1}{\cancel{(y+3)}}} \cdot \frac{(y-6)\overset{1}{\cancel{(y+3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-4)}}(x-8)}$ باختصار العوامل المشتركة

$= \frac{(x+4)(y-6)}{12(x-8)}$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(5A $\frac{8x-20}{x^2+2x-35} \cdot \frac{x^2-7x+10}{4x^2-16}$

(5B $\frac{x^2-9x+20}{x^2+10x+21} \div \frac{x^2-x-12}{6x+42}$

إرشادات للدراسة

تحليل كثيرات الحدود

عند تبسيط عبارات نسبية قد تظهر عوامل إحدى كثيرتي الحدود في كثيرة الحدود الأخرى، ففي مثال 5a، يظهر العامل $x-8$ أربع مرات. لذا استعمل ذلك مرشدًا عند تحليل كثيرات الحدود.

تبسيط الكسور المركبة **الكسر المركّب** هو كسر بسطه ومقامه أو أحدهما عبارة نسبية، والعبارات الآتية كسور مركبة:

$$\frac{\frac{4}{a}+6}{\frac{12}{a}-3} \qquad \frac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}} \qquad \frac{\frac{8}{x}}{x-2} \qquad \frac{\frac{c}{6}}{5d}$$

ولتبسيط كسر مركب، اكتبه أولًا على صورة قسمة عبارتين.

مثال 6 تبسيط الكسور المركبة

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

a) $\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$

$\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}} = \dfrac{a+b}{4} \div \dfrac{a^2+b^2}{4}$ بكتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

$= \dfrac{a+b}{4} \cdot \dfrac{4}{a^2+b^2}$ بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$= \dfrac{a+b}{\cancel{4}_1} \cdot \dfrac{\cancel{4}^1}{a^2+b^2} = \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$ بالتبسيط

b) $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}}$

$\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}} = \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \div \dfrac{4x}{y-x}$ بكتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

$= \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{y-x}{4x}$ بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$= \dfrac{x \cdot x}{(x+y)(x-y)} \cdot \dfrac{(-1)(x-y)}{4x}$ بالتحليل إلى العوامل

$= \dfrac{x \cdot \cancel{x}^1}{(x+y)\cancel{(x-y)}_1} \cdot \dfrac{(-1)\cancel{(x-y)}^1}{4\cancel{x}_1}$ باختصار العوامل المشتركة

$= \dfrac{-x}{4(x+y)}$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

6A) $\dfrac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}}$

6B) $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{y-x}{y+7}}$

تأكد

مثال 1 بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

1) $\dfrac{x^2-5x-24}{x^2-64}$

2) $\dfrac{c+d}{3c^2-3d^2}$

مثال 2

3) **اختيار من متعدد:** حدد قيم x التي تجعل العبارة $\dfrac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرّفة.

A $-7, 4$ B $4, 7$ C $-7, 4, 7$ D $-4, 7$

الأمثلة 3–6 بسّط كل عبارة مما يأتي:

4) $\dfrac{y^2+3y-40}{25-y^2}$

5) $\dfrac{a^2x-b^2x}{by-ay}$

6) $\dfrac{x^3+27}{3x+9}$

7) $\dfrac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \dfrac{8z}{9xy^3}$

8) $\dfrac{12x^3y}{13ab^2} \div \dfrac{36xy^3}{26b}$

9) $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-6x+8} \cdot \dfrac{x-4}{x^2-2x-35}$

10) $\dfrac{\frac{a^3b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}}$

11) $\dfrac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}}$

12) $\dfrac{a^2-b^2}{3a^2-6a+3} \div \dfrac{4a+4b}{a^2-1}$

13) يمكن استعمال كثيرة الحدود $(6x^3 + 11x^2 + 4x)$ للتعبير عن حجم الصندوق المجاور الذي له شكل منشور متوازي مستطيلات، حيث x ارتفاع الصندوق.

a) أوجد طول الصندوق وعرضه.

b) أوجد النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة عندما $x = 2$.

c) هل النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة ثابتة لكل قيم x ؟

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسّط كل عبارة مما يأتي:

14) $\dfrac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12}$

15) $\dfrac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)}$

16) $\dfrac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)}$

17) $\dfrac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)}$

مثال 2

18) **اختيار من متعدد:** حدد قيم x التي تجعل العبارة $\dfrac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرّفة.

A $-6, 3$ B $4, 6$ C $-6, 6$ D $-6, 3, 4, 6$

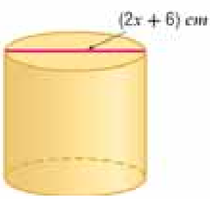
مثال 3 بسّط كل عبارة مما يأتي:

19) $\dfrac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2}$

20) $\dfrac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

21) $\dfrac{16-c^2}{c^2+c-20}$

22) $\dfrac{3-3y}{y^3-1}$



23) **هندسة:** إذا كان حجم الأسطوانة المجاورة $(x+3)(x^2-3x-18)\pi\ cm^3$، فأوجد ارتفاعها.

الأمثلة 4-6 بسّط كل عبارة مما يأتي:

24) $\dfrac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \cdot \dfrac{12ab^2c}{18ab^3c^2f}$

25) $\dfrac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \dfrac{7wxyz}{12w^2y^3z}$

26) $\dfrac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \dfrac{12a^4b^3c}{70abcf^2}$

27) $\dfrac{9x^2yz}{5z^4} \div \dfrac{12x^4y^2}{50xy^4z^2}$

28) $\dfrac{y^2+8y+15}{y-6} \cdot \dfrac{y^2-9y+18}{y^2-9}$

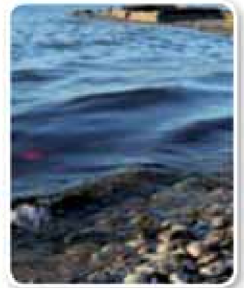
29) $\dfrac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \dfrac{c^2-8c}{c+d}$

30) $\dfrac{\frac{x^2-9}{6x-12}}{\frac{x^2+10x+21}{x^2-x-2}}$

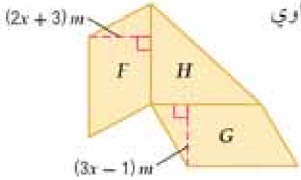
31) $\dfrac{\frac{y-x}{z^3}}{\frac{x-y}{6z^2}}$

32) $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{b^3}}{\frac{b^2-ab}{a^2}}$

33) $\dfrac{\frac{x-y}{a+b}}{\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}}$



34) **هندسة:** في الشكل المجاور، إذا كانت مساحة متوازي الأضلاع F تساوي $(8x^2 + 10x - 3)\text{m}^2$، وارتفاعه $(2x+3)\text{m}$، ومساحة متوازي الأضلاع G تساوي $(6x^2 + 13x - 5)\text{m}^2$، وارتفاعه $(3x-1)$ m، فأوجد مساحة المثلث القائم الزاوية H.



35) **تلوث:** تمثل الدالة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سُمْك بقعة نفط تسربت من إحدى ناقلات النفط، حيث T سُمك البقعة التي تبعد x m عن مكان التسرب وتقاس بالمتر.

a. اكتب الدالة في أبسط صورة.

b. ما سمك البقعة التي تبعد 100 m عن مكان التسرب؟

الربط مع الحياة

يُعد تلوث مياه البحار بالنفط من أخطر الملوثات في عصرنا؛ وذلك لصعوبة مكافحته، وأثره الضار على البيئة وصحة الإنسان.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

36) $\frac{x^2 - 16}{3x^3 + 18x^2 + 24x} \cdot \frac{x^3 - 4x}{2x^2 - 7x - 4}$

37) $\frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

38) $\frac{9 - x^2}{x^2 - 4x - 21} \cdot \left(\frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 15x + 7}\right)^{-1}$

39) $\left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2}\right)^3 \cdot \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3}$

40) $\left(\frac{2xy^3}{3abc}\right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4}$

41) $\dfrac{\frac{2x^2 + 7x - 30}{-6x^2 + 13x + 5}}{\frac{4x^2 + 12x - 72}{3x^2 - 11x - 4}}$

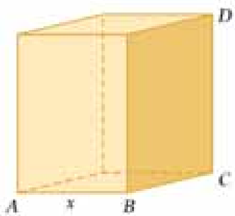
42) $\dfrac{\frac{4x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 - 24x}}{\frac{12x^2 + 12x - 9}{-2x^2 + 5x + 12}}$

43) **هندسة:** مساحة قاعدة المنشور (متوازي المستطيلات) المجاور تساوي 20 cm^2.

a) أوجد طول الضلع $\overline{BC}$ بدلالة x.

b) إذا كان $DC = 3BC$، فأوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x.

c) أوجد حجم المنشور بدلالة x.



بسّط كل عبارة مما يأتي:

44) $\frac{x^2 + 4x - 32}{2x^2 + 9x - 5} \cdot \frac{3x^2 - 75}{3x^2 - 11x - 4} \div \frac{6x^2 - 18x - 60}{x^3 - 4x}$

45) $\frac{8x^2 + 10x - 3}{3x^2 - 12x - 36} \div \frac{2x^2 - 5x - 12}{3x^2 - 17x - 6} \cdot \frac{4x^2 + 3x - 1}{4x^2 - 40x + 24}$

46) $\frac{4x^2 - 9x - 9}{3x^2 + 6x - 18} \div \frac{-2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 4x - 32} \div \frac{8x^2 + 10x + 3}{6x^2 - 6x - 12}$

47) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال التمثيل البياني لدالة نسبية.

a) **جبريًا:** بسّط العبارة: $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$.

b) **جدوليًا:** إذا كانت $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$، فاستعمل العبارة التي حصلت عليها في الفرع (a) لكتابة الدالة $g(x)$ المرتبطة بالدالة $f(x)$، ثم استعمل الحاسبة البيانية لعمل جدول لقيم x لكلتا الدالتين، حيث $0 \le x \le 10$.

c) **تحليليًا:** أوجد قيمة كل من $f(4)$، و $g(4)$، ثم وضح الفرق بين القيمتين.

d) **بيانيًا:** مثّل كلًّا من الدالتين بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، استعمل الميزة TRACE في الحاسبة البيانية لاكتشاف كل من التمثيلين البيانيين، واستعمل المفتاحين ▲ و ▼ للانتقال بين التمثيلين، ثم قارن بينهما.

e) **لفظيًا:** ماذا تستنتج بالنسبة للعبارة الأصلية في الفرع (a) والدالة $g(x)$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **تبرير:** قارن بين كل من $\frac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$.

49) **اكتشف الخطأ:** قام كل من علي ومحمد بتبسيط العبارة $\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x}$. أيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

محمد	علي
$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4}$ $= -\frac{x+y}{4}$	$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x}$ $= \frac{-4}{x+y}$

50) **تحدٍّ:** ما قيمة y التي تجعل الجملة $\frac{x-6}{x+3} \cdot \frac{y}{x-6} = x-2$ صحيحة دائمًا عدا عند $x = 6$ و $x = -3$؟

51) **تبرير:** هل الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ فسر إجابتك.
"الدالة النسبية التي تتضمن متغيرًا في المقام تكون معرفة لجميع الأعداد الحقيقية".

52) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة نسبية ناتج تبسيطها $\frac{x-1}{x+4}$.

53) **اكتب:** إذا علمت أن ناتج تبسيط العبارة النسبية $\frac{x^2+3x}{4x}$ هو $\frac{x+3}{4}$. فوضح لماذا لا تكون هذه العبارة معرَّفةً لجميع قيم x ؟

تدريب على اختبار

54) **احتمال:** إذا رمي مكعب مرقم من 1-6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 4 ؟

A $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{2}{3}$

55) ما أبسط صورة للعبارة النسبية $\frac{16-c^2}{c^2+c-20}$ ؟

A $\frac{4-c}{c-5}$ **C** $\frac{c+4}{c+5}$

B $\frac{4-c}{c+5}$ **D** $-\frac{c+4}{c+5}$

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًا من المعادلتين الآتيتين:

56) $\sqrt{x-8} + 5 = 7$ (الدرس 4-7)

57) $\sqrt[3]{n+8} - 6 = -3$ (الدرس 4-7)

58) بسط العبارة $\frac{h^{\frac{1}{2}}+1}{h^{\frac{1}{2}}-1}$ (الدرس 4-6)

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 3-3)

59) $(2a+3b)+(8a-5b)$

60) $(x^2-4x+3)-(4x^2+3x-5)$

61) $(5y+3y^2)+(-8y-6y^2)$

62) $2x(3y+9)$

63) $(x+6)(x+3)$

64) $(x+1)(x^2-2x+3)$

5-2

جمع العبارات النسبية وطرحها
Adding and Subtracting Rational Expressions

فيما سبق:

درست جمع كثيرات حدود وطرحها.

والآن:

- أجد LCM لكثيرات حدود.
- أجمع عبارات نسبية وأطرحها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عندما نكون في الشارع وتقترب سيارة إطفاء، نسمع صفارتها وهي تقترب منا بتردد أعلى؛ لأن طول موجة الصوت ينضغط إلى حد ما بفعل سرعة قدومها في اتجاهنا، وبعد أن تتجاوزنا متباعدة عنا نسمع صوت صفارتها بتردد منخفض لأن طول موجتها يزداد استطالة. ويعرف ذلك بتأثير دوبلر (Doppler) . ويمكن تمثيل هذه الظاهرة بالعبارة النسبية $f_s\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$ ، حيث f_s تردد صوت صافرة سيارة الإطفاء، v سرعة الصوت في الهواء، v_s سرعة سيارة الإطفاء.

(LCM) لكثيرات الحدود تمامًا كما في الأعداد النسبية التي على الصورة الكسرية فعند جمع عبارتين نسبيتين بمقامين مختلفين أو طرحهما يجب أن تجد أولًا المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للمقامين.

ولإيجاد (LCM) لعددين أو لكثيرتي حدود أو أكثر يجب أن تُحلل كلًّا منها إلى عواملها الأولية أولًا، ثم تضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر.

كثيرات الحدود	الأعداد
$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2x^2 - 2}$	$\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$
LCM لكثيرتي الحدود $x^2 - 3x + 2,\ 2x^2 - 2$	**LCM للعددين 6, 9**
$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$	$6 = 2 \cdot 3$
$2x^2 - 2 = 2 \cdot (x - 1)(x + 1)$	$9 = 3 \cdot 3$
LCM هو $2(x - 1)(x - 2)(x + 1)$	LCM هو $2 \cdot 3 \cdot 3$ يساوي 18

إرشادات للدراسة

LCM

الرمز (LCM) يمثل اختصارًا لـ :

Least Common Multiple

(المضاعف المشترك الأصغر)

مثال 1 LCM لوحيدات الحد وكثيرات الحدود

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

a) $6xy,\ 15x^2,\ 9xy^4$

$6xy = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y$ بالتحليل

$15x^2 = 3 \cdot 5 \cdot x^2$ بالتحليل

$9xy^4 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y^4$ بالتحليل

LCM هو $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot y^4$ بضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

ويساوي $90x^2y^4$ بالتبسيط

b) $y^4 + 8y^3 + 15y^2,\ y^2 - 3y - 40$

$y^4 + 8y^3 + 15y^2 = y^2(y + 5)(y + 3)$ بالتحليل

$y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$ بالتحليل

LCM هو $y^2(y + 5)(y + 3)(y - 8)$ بضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

تحقق من فهمك

1A) $12a^2b,\ 15abc,\ 8b^3c^4$

1B) $4a^2 - 12a - 16,\ a^3 - 9a^2 + 20a$

جمع العبارات النسبية وطرحها عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما يجب أن توحد مقاميهما، تمامًا كما في جمع الكسور وطرحها.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

جمع العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لجمع العبارات النسبية، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اجمع.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ، حيث $b \neq 0, d \neq 0$ ، فإن

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

طرح العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لطرح العبارات النسبية، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اطرح.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإن $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$

ومن الأفضل أن يكون المقام المشترك هو (LCM) للمقامات.

مثال 2 جمع عبارات مقاماتها وحيدات حد

بسّط العبارة $\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2}$

$$\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2} = \frac{3y}{2x^3} \cdot \frac{4y^2}{4y^2} + \frac{5z}{8xy^2} \cdot \frac{x^2}{x^2}$$ LCM هو $8x^3y^2$

$$= \frac{12y^3}{8x^3y^2} + \frac{5x^2z}{8x^3y^2}$$ بضرب الكسور

$$= \frac{12y^3 + 5x^2z}{8x^3y^2}$$ بجمع البسطين

تحقق من فهمك

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(2A $\frac{4}{5a^3b^2} + \frac{9c}{10ab}$

(2B $\frac{3a^2}{16b^2} - \frac{8x}{5a^3b}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات النسبية

يمكن تبسيط العبارة النسبية الناتجة عن جمع أو طرح عبارتين نسبيتين في بعض الأحيان.

يستعمل LCM أيضًا لجمع أو طرح عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود.

مثال 3 عبارات مقاماتها كثيرات حدود

بسّط العبارة $\frac{5}{6x - 18} - \frac{x - 1}{4x^2 - 14x + 6}$

$$\frac{5}{6x - 18} - \frac{x - 1}{4x^2 - 14x + 6} = \frac{5}{6(x - 3)} - \frac{x - 1}{2(2x - 1)(x - 3)}$$ بتحليل المقامين

$$= \frac{5(2x - 1)}{6(x - 3)(2x - 1)} - \frac{(x - 1)(3)}{2(2x - 1)(x - 3)(3)}$$ بالضرب في العوامل المفقودة

$$= \frac{10x - 5 - 3x + 3}{6(x - 3)(2x - 1)}$$ بطرح البسطين

$$= \frac{7x - 2}{6(x - 3)(2x - 1)}$$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(3A $\frac{x - 1}{x^2 - x - 6} - \frac{4}{5x + 10}$

(3B $\frac{x - 8}{4x^2 + 21x + 5} + \frac{6}{12x + 3}$

من طرائق تبسيط الكسور المركبة تبسيط كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط العبارة الناتجة.

مثال 4 **تبسيط الكسور المركبة بتبسيط كل من البسط والمقام على حدة**

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{y}{y}-\frac{x}{y}}$$ المقام المشترك الأصغر للبسط هو x
المقام المشترك الأصغر للمقام هو y

$$= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}}$$ بتبسيط كلٍّ من البسط والمقام

$$= \frac{x+1}{x} \div \frac{y-x}{y}$$ بكتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y}{y-x}$$ بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$ بالتبسيط

إرشادات للدراسة

حدود غير معرفة
تذكَّر أن هناك قيودًا على المتغيرات في المقام.

تحقق من فهمك

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(4A $\dfrac{1-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$

(4B $\dfrac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}+2}$

وهناك طريقة أخرى لتبسيط الكسور المركّبة هي إيجاد LCM لمقامات البسط والمقام، ثم اختصارها بضرب كل من بسط العبارة ومقامها في LCM .

مثال 5 **تبسيط الكسور المركبة بإيجاد (LCM) للمقامات**

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{xy}{xy}$$ LCM لمقامات البسط والمقام هو xy ، بضرب العبارة في $\frac{xy}{xy}$

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$ خاصية التوزيع

لاحظ أنه تم حل المسألة نفسها في المثالين 5 , 4 بطريقتين مختلفتين، وكانت النتيجة واحدة. لذا، يمكنك استعمال الطريقة التي تناسبك لحل المسائل المشابهة.

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(5A $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}$

(5B $\dfrac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}$

(5C $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$

(5D $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}$

تأكد

مثال 1 أوجد LCM لكل مما يأتي:

(1 $16x, 8x^2y^3, 5x^3y$

(2 $7a^2, 9ab^3, 21abc^4$

(3 $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15$

(4 $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4$

المثالان 3 , 2 بسّط كل عبارة مما يأتي:

(5 $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3}$

(6 $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3}$

(7 $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3}$

(8 $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d}$

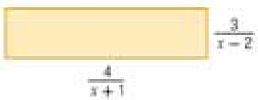
(9 $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x + 6}$

(10 $\frac{8}{y - 3} + \frac{2y - 5}{y^2 - 12y + 27}$

(11 $\frac{4}{3x + 6} - \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

(12 $\frac{3a + 2}{a^2 - 16} - \frac{7}{6a + 24}$

(13 **هندسة:** أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.



المثالان 5 , 4 بسّط كل عبارة مما يأتي:

(14 $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$

(15 $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}}$

(16 $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}}$

(17 $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد LCM لكل مما يأتي:

(18 $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3$

(19 $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2$

(20 $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$

(21 $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24$

المثالان 3 , 2 بسّط كل عبارة مما يأتي:

(22 $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3}$

(23 $\frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z}$

(24 $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2}$

(25 $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy}$

(26 $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2}$

(27 $\frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3}$

(28 $\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$

(29 $\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20}$

(30 $\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8}$

(31 $\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18}$

(32 $\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24}$

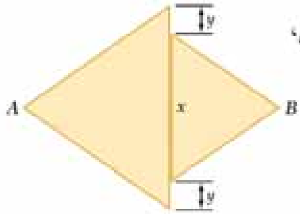
(33 $\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15}$

(34 **أحياء:** يمكن قياس PH أو درجة الحموضة A في فم شخص بعد تناوله الطعام باستعمال الصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2 + 36} + 6.5$ ، حيث t عدد الدقائق التي مرّت بعد تناول الطعام.

a) بسّط الصيغة السابقة.

b) أوجد درجة الحموضة في فم شخص بعد مضي 30 min على تناوله الطعام.

35) **هندسة:** إذا كان كل من المثلثين في الشكل المجاور متطابق الضلعين، وكانت مساحة المثلث الأصغر $200\,cm^2$، ومساحة المثلث الأكبر $300\,cm^2$، فأوجد البعد بين النقطة A والنقطة B بدلالة x , y في أبسط صورة.



المثالان 4 , 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

36) $\dfrac{\frac{2}{x-3}+\frac{3x}{x^2-9}}{\frac{3}{x+3}-\frac{4x}{x^2-9}}$

37) $\dfrac{\frac{4}{x+5}+\frac{9}{x-6}}{\frac{5}{x-6}-\frac{8}{x+5}}$

38) $\dfrac{\frac{5}{x+6}-\frac{2x}{2x-1}}{\frac{x}{2x-1}+\frac{4}{x+6}}$

39) $\dfrac{\frac{8}{x-9}-\frac{x}{3x+2}}{\frac{3}{3x+2}+\frac{4x}{x-9}}$

40) **إنتاج النفط:** قدّر مهندسو إحدى شركات استخراج النفط إنتاج إحدى الآبار مستعملين الدالة $R(x)=\frac{20}{x}+\frac{200x}{3x^2+20}$، حيث $R(x)$ معدل إنتاج البئر بآلاف البراميل سنويًّا بعد x سنة من بدء الإنتاج.

a) بسّط الدالة $R(x)$.

b) ما معدل إنتاج البئر بعد مرور 50 سنة؟

الربط مع الحياة

يعد حقل الغوار أكبر حقول النفط في العالم، ويقع الجزء الأكبر منه في محافظة الأحساء، وبدأ الإنتاج فيه عام 1370 هـ. ويقدر إنتاجه حاليًا بحوالي 5 ملايين برميل يوميًا

أوجد LCM لكل مما يأتي:

41) $12xy^4, 14x^4y^2, 5xyz^3, 15x^5y^3$

42) $-6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$

43) $x^2-3x-28, 2x^2+9x+4, x^2-16$

44) $x^2-5x-24, x^2-9, 3x^2+8x-3$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

45) $\frac{1}{12a}+6-\frac{3}{5a^2}$

46) $\frac{5}{16y^2}-4-\frac{8}{3x^2y}$

47) $\frac{5}{6x^2+46x-16}+\frac{2}{6x^2+57x+72}$

48) $\frac{1}{8x^2-20x-12}+\frac{4}{6x^2+27x+12}$

49) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{y}{x+y}-\frac{x}{x-y}$

50) $\frac{x^2+x}{x^2-9x+8}+\frac{4}{x-1}-\frac{3}{x-8}$

51) $\dfrac{\frac{2}{a-1}+\frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2-5a+4}}$

52) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)(x+y)}$

53) **هندسة:** يُعطى طول مستطيل بالعبارة $\frac{x^2-9}{x-2}$، ويعطى طول مستطيل آخر بالعبارة $\frac{x+3}{x^2-4}$. أوجد النسبة بين طولي المستطيلين، ثم اكتبها في أبسط صورة.

54) **زوارق:** قطع علي مسافة $20\ mi$ راكبًا زورقه، حيث قطع نصف المسافة بسرعة معينة والنصف الثاني بسرعة تقل عن السرعة الأولى بمقدار $2\ mi/h$.

a) إذا كانت x تعبر عن السرعة الأولى بالأميال لكل ساعة فاكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه علي لقطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه لقطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه لقطع المسافة كلها.

55) **تصوير:** يحدد البعد البؤري لعدسة آلة التصوير المسافة التي يمكن خلالها التصوير بهذه الآلة؛ فكلما كان البعد البؤري أصغر كانت مسافة التصوير أكبر. فإذا كان البعد البؤري لعدسة آلة تصوير 70 mm وأردنا تصوير جسم على بعد x mm من العدسة، وجب أن يكون الفيلم على بعد y mm من العدسة. ويمكن تمثيل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70}$.

a) اكتب y كدالة في المتغير x.

b) هل يمكن تصوير جسم على بعد 70 mm من العدسة؟ ولماذا؟

الربط مع الحياة

يوصف التصوير القريب عمومًا بأنه القدرة على تصوير جسم ما على أن يكون حجم صورته أكبر ما يمكن عند طباعة الصورة بالبعدين $4\,cm \times 6\,cm$.

56) **أدوية:** يتناول أحد المرضى نوعين من الدواء. فإذا كان تركيزهما في دمه يُعطى بالدالتين:

$g(t)=\frac{3t}{2t^2+6t+4}$ ، $f(t)=\frac{2t}{3t^2+9t+6}$ حيث t الزمن بالساعات بعد تناول الدواء.

a) اجمع الدالتين لتحصل على دالة تمثل تركيز النوعين معًا في دم المريض.

b) ما تركيز النوعين في دم المريض بعد 8 ساعات من تناولهما؟

مسائل مهارات التفكير العليا

57) **تحدٍّ:** بسّط العبارة $\dfrac{5x^{-2}-\frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3-x^{-1}}+6x^{-1}}$.

58) **تبرير:** حدد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة، ووضّح إجابتك:

$\frac{6}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{10x-10}{(x+2)(x-3)}$ لأي عدد حقيقي x.

59) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث وحيدات حد على أن يكون LCM لهن يساوي $180a^4b^6c$.

60) **اكتب:** اكتب طريقة منظمة لجمع عبارات نسبية مختلفة المقامات.

تدريب على اختبار

61) إذا كان $\frac{1}{a}+\frac{2a}{a}=4$، فما قيمة a؟

A) $-\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 5-1)

62) $\frac{-4ab}{21c}\cdot\frac{14c^2}{22a^2}$

63) $\frac{x^2-y^2}{6y}\div\frac{x+y}{36y^2}$

64) $\frac{n^2-n-12}{n+2}\div\frac{n-4}{n^2-4n-12}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداها مهارة سابقة

65) $y=-\sqrt{2x+1}$

66) $y=\sqrt{5x-3}$

67) $y=2\sqrt{3-4x}+3$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا: (الدرس 3-5)

68) $y=4(x+3)^2+1$

69) $y=-(x-5)^2-3$

70) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

71) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-5$

72) $y=x^2+6x+2$

73) $y=x^2-8x+18$

5-3

تمثيل دوال المقلوب بيانيًا
Graphing Reciprocal Functions

فيما سبق:

درست تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيًا.

والآن:

- أحدد خصائص دوال المقلوب.
- أمثّل تحويلات دوال المقلوب بيانيًا.

المفردات:

دالة المقلوب
reciprocal function

القطع الزائد
hyperbola

خط التقارب
asymptote

خط التقارب الرأسي
vertical asymptote

خط التقارب الأفقي
horizontal asymptote

www.obeikaneducation.com

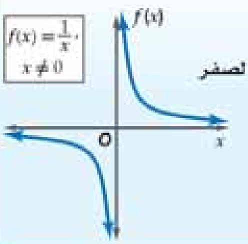
لماذا؟

خطّط مجموعة من الطلبة لجمع مبلغ 5000 ريال للقيام بعمل خيري، فقرروا أن يتبرع كل منهم بريال واحد يوميًا، فإذا كان عدد الطلاب n طالبًا، فإن عدد الأيام c اللازمة لجمع المبلغ يُعطى بالعلاقة $c = \frac{5000}{n}$.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية تمثل الدالة $c = \frac{5000}{n}$ دالة مقلوب، **دالة المقلوب** التي ستدرسها هي الدالة المكتوبة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالة خطية، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي — **الدالة الرئيسة (الأم) لدوال المقلوب** — أضف إلى مطويتك

الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \frac{1}{x}$
شكل التمثيل البياني:	قطع زائد
المجال والمدى:	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
خطا التقارب:	$x = 0$ و $y = 0$
المقطعان:	لا يوجد
تكون الدالة غير معرفة عندما:	$x = 0$



مجال دالة المقلوب هو مجموعة القيم التي تكون الدالة عندها معرفة.

فمثلًا الدوال:	$f(x) = \frac{-3}{x+2}$ ،	$g(x) = \frac{4}{x-5}$ ،	$h(x) = \frac{3}{x}$
غير معرفة عندما:	$x = -2$	$x = 5$	$x = 0$

مثال 1 **القيود على المجال (تحديد القيم التي تجعل الدالة غير معرفة)**

حدد قيمة x التي تجعل الدالة $f(x) = \frac{3}{2x+5}$ غير معرفة.

أوجد قيمة x التي يساوي المقام عندها صفرًا.

$$2x + 5 = 0$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

الدالة غير معرّفة عندما $x = -\frac{5}{2}$.

تحقق من فهمك

لكل دالة مما يأتي حدّد قيمة x التي تجعلها غير معرّفة:

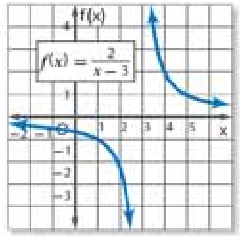
(1A $f(x) = \frac{2}{x-1}$ **(1B** $f(x) = \frac{7}{3x+2}$

خط التقارب لدالة: هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة. ولدالة المقلوب $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، **خط تقارب رأسي** عند القيمة المستثناة من مجالها، و**خط تقارب أفقي** يبيّن سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة.

مثال 2 تحديد خصائص دوال المقلوب

حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

(a



حدد قيمة x التي تكون الدالة $f(x)$ عندها غير معرّفة.

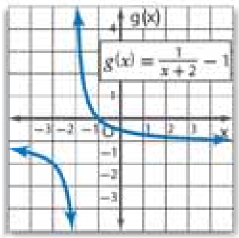
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

$f(x)$ غير معرّفة عند $x = 3$. وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = 3$.

كلما زادت قيم x الأكبر من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر، وكلما قلت قيم x الأقل من 3 تقترب قيم $f(x)$ من الصفر أيضًا. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$.

مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

(b



حدد قيمة x التي تكون الدالة $g(x)$ عندها غير معرفة.

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

$g(x)$ غير معرفة عند $x = -2$، وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

كلما زادت قيم x الأكبر من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1، وكلما قلت قيم x الأقل من -2 تقترب قيم $g(x)$ من -1 أيضًا، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = -1$.

مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -1 .

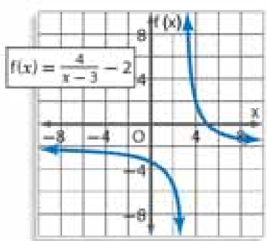
إرشادات للدراسة

خطوط التقارب
يبين خط التقارب الرأسي قيمة x التي تكون الدالة عندها غير معرفة. أما خط التقارب الأفقي فيبين سلوك طرفي التمثيل البياني.

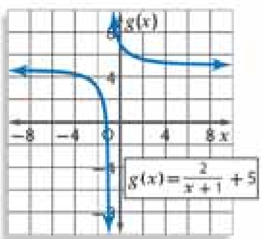
✓ تحقق من فهمك

حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

(2A



(2B



تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب يمكنك تطبيق ما تعلمته في أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوال الأخرى على فهم التمثيل البياني لدوال المقلوب. لاحظ امتداد خطي التقارب في المثال (2) بمحاذاة التمثيل البياني للدالة.

مفهوم أساسي — تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

أضف إلى مطويتك

$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$$

h: إزاحة أفقية	k: إزاحة رأسية
إزاحة بمقدار $\vert h \vert$ وحدة إلى اليمين إذا كانت h موجبة.	إزاحة بمقدار $\vert k \vert$ وحدة إلى الأعلى إذا كانت k موجبة.
إزاحة بمقدار $\vert h \vert$ وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة.	إزاحة بمقدار $\vert k \vert$ وحدة إلى الأسفل إذا كانت k سالبة.
خط تقارب رأسي عند $x = h$.	خط تقارب أفقي عند $y = k$.

a: الشكل والاتجاه

إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x ، وإذا كانت $|a| > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا. وإذا كانت $0 < |a| < 1$ ، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.

إرشادات للدراسة

خطوط التقارب
تمتد خطوط التقارب لدالة المقلوب مع التمثيل البياني للدالة، وتتقاطع عند النقطة (h, k)

مثال 3 — تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدّد مجال ومدى كلٍّ منهما:

a) $f(x) = \frac{2}{x-4} + 2$

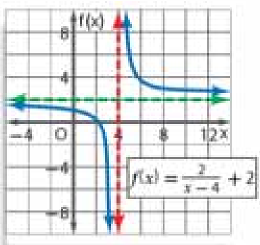
التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.

$a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.

$h = 4$: إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات إلى اليمين.
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 4$.

$k = 2$: إزاحة التمثيل البياني وحدتين إلى أعلى.
يوجد خط تقارب أفقي عند $y = 2$.

المجال: $\{x \mid x \neq 4\}$ المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq 2\}$



b) $f(x) = \frac{-3}{x+1} - 4$

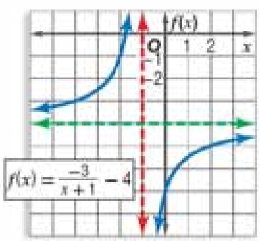
التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.

$a = -3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا، وينعكس حول المحور x .

$h = -1$: إزاحة التمثيل البياني وحدة واحدة إلى اليسار.
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -1$.

$k = -4$: إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات إلى أسفل.
يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -4$.

المجال: $\{x \mid x \neq -1\}$ المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -4\}$



تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدّد مجال ومدى كلٍّ منهما:

3A) $f(x) = \frac{-2}{x+4} + 1$

3B) $g(x) = \frac{1}{3(x-1)} - 2$

يمكن استعمال دوال المقلوب لحل مسائل حياتية عديدة.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة معادلات دوال المقلوب

سفر: تقطع طائرة ركاب مسافة 7500 ميل في إحدى الرحلات.

a) اكتب دالة تبين الزمن t الذي تحتاج إليه الطائرة لتقطع هذه المسافة بدلالة السرعة r. ومثّل هذه الدالة بيانيًا.

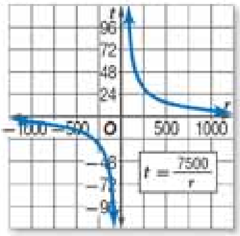
حل المعادلة $rt = d$ بالنسبة للمتغير t.

$rt = d$ المعادلة الأصلية

$t = \frac{d}{r}$ بقسمة كلا الطرفين على r

$t = \frac{7500}{r}$ $d = 7500$

مثل الدالة $t = \frac{7500}{r}$ بيانيًا.



b) وضح أية قيود يمكن وضعها على كل من المجال و المدى في هذه الحالة.

المجال والمدى في هذه الحالة هما جميع الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن القيم السالبة غير منطقية في هذه الحالة. وهناك شرط أو قيد إضافي على المجال؛ لأن للطائرة سرعة عظمى، وأخرى صغرى تستطيع الطيران بها.

الربط مع الحياة

الخطوط الجوية العربية السعودية هي شركة الطيران الرسمية في المملكة،وتتخذ من مطار الملك عبدالعزيز الدولي بجدة مركزًا رئيسًا لعملياتها، وتقدم خدماتها إلى أكثر من 75 وجهة في آسيا، أفريقيا، أوروبا، الشرق الأوسط، أمريكا الشمالية.

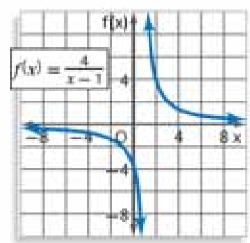
تحقق من فهمك

4) رحلات: نظم طلبة الصف الثاني الثانوي رحلة إلى منطقة أثرية بإشراف إدارة مدرستهم، حيث دفع كل واحد منهم 45 ريالًا رسم اشتراك، وتكفلت إدارة المدرسة بنفقات إضافية للرحلة وهي 2500 ريالًا. اكتب دالة تمثل متوسط التكلفة الكلية للطالب الواحد ومثلها بيانيًا. ووضح أية قيود يمكن وضعها على كل من المجال والمدى.

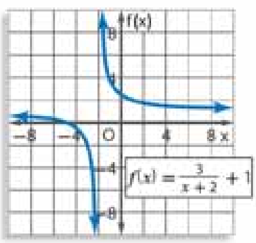
تأكد

المثالان 2 ، 1 حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

1)



2)



مثال 3 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجال ومدى كل منها:

3) $f(x) = \frac{5}{x}$ **4)** $f(x) = \frac{2}{x+3}$ **5)** $f(x) = \frac{-1}{x-2} + 4$

مثال 4

6) هدية جماعية: يرغب بعض الطلاب في إرسال هدية ثمنها 150 ريالًا إلى أحد أصدقائهم.

a) فإذا كانت c تمثل المبلغ الذي يدفعه كل منهم، f عدد الأصدقاء، فاكتب دالة تمثل المبلغ الذي يدفعه كل منهم بدلالة عدد الأصدقاء.

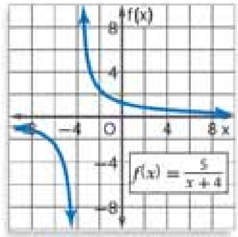
b) مثّل هذه الدالة بيانيًا.

c) وضح أية قيود يمكن وضعها على كل من المجال والمدى في هذه الحالة.

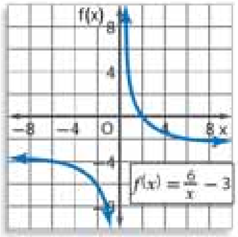
تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2 حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

(7



(8



مثال 3 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كل منها:

(9 $f(x)=\frac{3}{x}$ **(10** $f(x)=\frac{-4}{x+2}$ **(11** $f(x)=\frac{2}{x-6}$

(12 $f(x)=\frac{-2}{x-5}$ **(13** $f(x)=\frac{3}{x-7}-8$ **(14** $f(x)=\frac{9}{x+3}+6$

مثال 4 **(15** **كيمياء:** لدى محمد 200 g من سائل مجهول. وتساعد معرفة كثافة السائل على تحديد نوعه. ويمكن حساب كثافة السائل بقسمة كتلته على حجمه.

(a اكتب دالة تمثل كثافة هذا السائل بدلالة حجمه.

(b مثّل هذه الدالة بيانيًّا.

(c استعمل التمثيل البياني لتحديد خطوط التقارب، والمجال والمدى لهذه الدالة.

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كل منها:

(16 $f(x)=\frac{5}{3x}$ **(17** $f(x)=\frac{2}{4x+1}$ **(18** $f(x)=\frac{1}{2x+3}$

(19 **تمثيلات متعددة:** افترض أن $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$.

(a **جدوليًّا:** أنشئ جدول قيم للمقارنة بين الدالتين.

(b **بيانيًّا:** استعمل القيم في الجدول لتمثيل كِلتا الدالتين بيانيًّا.

(c **لفظيًّا:** قارن بين التمثيلين البيانيين وحدد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بينهما.

(d **تحليليًّا:** اكتب تخمينًا حول الفرق بين التمثيل البياني للدوال التي على الصورة $f(x)=\frac{1}{x^n}$، عندما يكون n عددًا زوجيًّا، وعندما يكون n عددًا فرديًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

(20 **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة مقلوب يكون لتمثيلها البياني خط تقارب رأسي عند $x=-4$، وخط تقارب أفقي عند $y=6$.

(21 **تبرير:** قارن بين التمثيلين البيانيين لكل زوج من المعادلات الآتية موضحًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف.

(a $y=\frac{1}{x}, y-7=\frac{1}{x}$ **(b** $y=\frac{1}{x}, y=4\left(\frac{1}{x}\right)$ **(c** $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x+5}$

(d استعمل ملاحظاتك في الفروع a - c لتمثيل الدالة $y-7=4\left(\frac{1}{x+5}\right)$ بيانيًّا دون استعمال جدول قيم.

22) **أيها لا ينتمي؟** حدد الدالة المختلفة عن الدوال الثلاث الأخرى، ووضح إجابتك.

$f(x) = \frac{3}{x+1}$ | $g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ | $h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$ | $j(x) = \frac{20}{x-7}$

23) **تحدٍّ،** اكتب دالتي مقلوب يكون للتمثيل البياني لكل منهما خطا التقارب نفساهما، ثم مثّل هاتين الدالتين بيانيًّا.

24) **اكتب،** ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس، ووضح كيف يمكن استعمال دوال المقلوب عند جمع التبرعات. وبيِّن لماذا يكون جزء من التمثيل البياني للدالة فقط منطقيًّا بالنسبة لسياق الموقف.

تدريب على اختبار

25) ما مجال الدالة $f(x) = \frac{8}{x+3}$؟

A مجموعة الأعداد الحقيقية

B مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

C مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3

D مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا -3

26) ما قيمة العبارة $(x+y)\ (x+y)$ إذا كانت $xy = -3, x^2 + y^2 = 10$؟

A 4

B 7

C 13

D 16

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-5)

27) $\dfrac{\frac{p^3}{2n}}{-\frac{p^2}{4n}}$

28) $\dfrac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}}$

29) $\dfrac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$

أوجد $(f+g)\ (x), (f-g)\ (x)\ , (f.g)\ (x)\ , (\frac{f}{g})\ (x)$ للدالتين $f(x), g\ (x)$ في كل مما يأتي: (الدرس 1-4)

30) $f\ (x) = x+9$
$g\ (x) = x-9$

31) $f\ (x) = 2x-3$
$g\ (x) = 4x+9$

32) $f\ (x) = 2x^2$
$g\ (x) = 8-x$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كل منها: (الدرس 1-3)

33) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

34) $f(x) = |x-5|$

35) $f(x) = x^2 - 4$

الفصل 5

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 5-1 إلى 5-3

بسّط كل عبارة مما يأتي:

1) $\frac{2x^2y^5}{7x^3yz}\cdot\frac{14xyz^2}{18x^4y}$

2) $\frac{24a^4b^6}{35ab^3}\div\frac{12abc}{7a^2c}$

3) $\frac{3x-3}{x^2+x-2}\cdot\frac{4x+8}{6x+18}$

4) $\frac{m^2+3m+2}{9}\div\frac{m+1}{3m+15}$

5) $\dfrac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}}$

6) $\dfrac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}}$

7) **اختيار من متعدد:** إذا كانت $r \neq \pm 2$، فأي مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$؟

A $\frac{r-2}{r+4}$ C $\frac{r+2}{r-4}$

B $\frac{r+4}{r-2}$ D $\frac{r+4}{r+2}$

8) **اختيار من متعدد:** ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$ غير معرّفة؟

A $-3, -1$ C $-3, -1, 9$

B $-9, 1, 3$ D -1

9) أوجد LCM لكثيرتي الحدود x^2-x , $3-3x$.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

10) $\frac{2x}{4x^2y}+\frac{x}{3xy^3}$

11) $\frac{3}{4m}+\frac{2}{3mn^2}-\frac{4}{n}$

12) $\frac{6}{r^2-3r-18}-\frac{1}{r^2+r-6}$

13) $\frac{3x+6}{x+y}+\frac{6}{-x-y}$

14) $\frac{x-4}{x^2-3x-4}+\frac{x+1}{2x-8}$

15) أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه.

16) **سفر:** سافر محمد إلى الشاطئ الذي يبعد 100 mi عن بيته، فقطع نصف المسافة بسرعة معينة، والنصف الثاني بسرعة أقل بمقدار 15 mi/h .

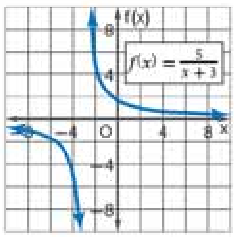
a) إذا كانت x تمثل السرعة الأولى فاكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الثاني من المسافة.

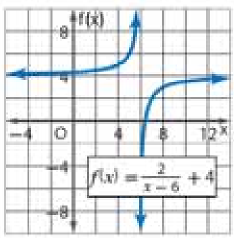
c) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه في قطع الرحلة كاملة في أبسط صورة.

حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

17)



18)



مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجال ومدى كل منها:

19) $f(x)=\frac{6}{x-1}$

20) $f(x)=\frac{-2}{x}+4$

21) $f(x)=\frac{3}{x+2}-5$

22) $f(x)=-\frac{1}{x-3}+2$

23) **شطائر:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 45 شطيرة لتناولها بالتساوي في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الشطائر التي سيأكلها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة.

a) اكتب دالة تمثّل هذا الموقف.

b) مثّل هذه الدالة بيانيًا.

5-4

تمثيل الدوال النسبية بيانيًا
Graphing Rational Functions

فيما سبق:
درست تمثيل دوال المقلوب بيانيًا.

والآن:
- أمثل بيانيًا دوال نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية.
- أمثل بيانيًا دوال نسبية لها نقاط انفصال.

المفردات:
الدالة النسبية rational function

نقطة الانفصال point discontinuity

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

اشترى أحمد آلة تصوير رقمية وطابعة لطباعة الصور بمبلغ إجمالي مقداره 1350 ريالًا، وكانت تكلفة الحبر وورق الطباعة للصورة الواحدة 1.5 ريال.

يمكن استعمال الدالة النسبية $C(p) = \dfrac{1.5p + 1350}{p}$

لحساب تكلفة طباعة p من الصور.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية **الدالة النسبية** هي دالة على الصورة $f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

لتمثيل الدالة النسبية بيانيًا يكون من المفيد تحديد أصفارها، وخطوط التقارب لها. فأصفار الدالة $f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$ هي جميع قيم x التي يكون عندها $a(x) = 0$.

مفهوم أساسي — خطوط التقارب الرأسية والأفقية

أضف إلى مطويتك

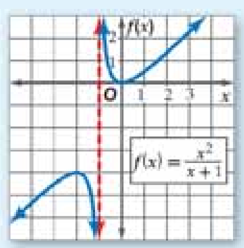
التعبير اللفظي: إذا كان $f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$, $b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

- يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$.
- يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y = \frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}$$

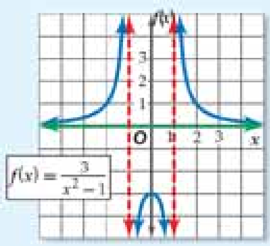
أمثلة:

لا يوجد خط تقارب أفقي



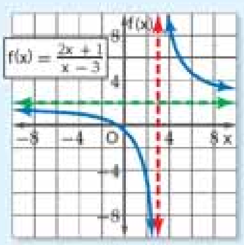
خط التقارب الرأسي:
$x = -1$

يوجد خط تقارب أفقي واحد



خطا التقارب الرأسي:
$x = -1, x = 1$

خط التقارب الأفقي:
$y = 0$



خط التقارب الرأسي:
$x = 3$

خط التقارب الأفقي:
$y = 2$

يمكن استعمال خطوط التقارب لتسهيل تمثيل الدالة النسبية بيانيًّا، كما يمكن استعمالها لتقسيم التمثيل البياني للدالة النسبية إلى أجزاء لإيجاد أزواج مرتبة عليه.

مثال 1 التمثيل البياني لدالة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي

مثّل الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أوجد أصفار الدالة.

$x^2 = 0$ — $a(x) = 0$

$x = 0$ — بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

يوجد للدالة صفر عندما $x = 0$.

الخطوة 2: ارسم خطوط التقارب.

أوجد خط التقارب الرأسي.

$x - 1 = 0$ — $b(x) = 0$

$x = 1$ — بإضافة العدد 1 لكلا الطرفين

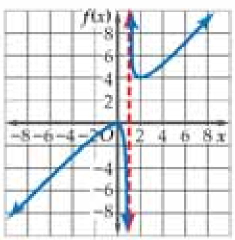
يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x = 1$.

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام فلا يوجد خط تقارب أفقي للدالة.

الخطوة 3: مثّل بيانيًّا.

أنشئ جدول قيم للدالة لتجد أزواجًا مرتبة تقع على التمثيل البياني، وصل بين تلك النقاط على المستوى الإحداثي.

x	$f(x)$
−3	−2.25
−2	−1.33
−1	−0.5
0	0
0.5	−0.5
1.5	4.5
2	4
3	4.5



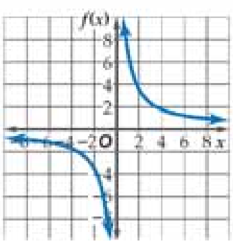
إرشادات للدراسة

الحاسبة البيانية
يمكن استعمال خاصية TABLE في الحاسبة البيانية لإنشاء جدول قيم للدالة عندما تكون القيم في الصورة العشرية.

تحقق من فهمك

1) مثّل الدالة $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 1}$ بيانيًّا .

قد لا تكون بعض القيم منطقية، وذلك في مسائل من واقع الحياة.
فعلى سبيل المثال في التمثيل البياني المجاور، إذا كانت قيم x تمثل زمنًا، أو مسافة أو عدد أشخاص فلا يمكن أن تكون هذه القيم سالبة في سياق المسألة، ولذلك لا حاجة للجزء الأيسر من التمثيل البياني.



مثال 2 من واقع الحياة — استعمال التمثيل البياني للدوال النسبية

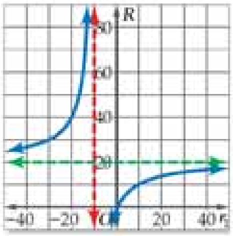
متوسط السرعة: يسير قارب خفر سواحل في عكس اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_1 mi/h. وخلال عودته إلى نقطة الانطلاق سار القارب في اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_2 mi/h. ويُعطى مقدار متوسط سرعة القارب خلال رحلة الذهاب والعودة بالصيغة $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

a) إذا كان r_1 هو المتغير المستقل، و R هو المتغير التابع فمثِّل الصيغة بيانيًّا عندما $r_2 = 10$ mi/h.

بتعويض قيمة r_2 تصبح الدالة $R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + (10)} = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$.

ويكون خط التقارب الرأسي هو $r_1 = -10$. وَ خط التقارب الأفقي هو $R = 20$.

مثّل خطي التقارب والدالة بيانيًّا.



b) ما مقطع المحور R للتمثيل البياني؟

مقطع المحور R هو $R = 0$.

c) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، مقدار السرعة غير سالب، ولذا فإن قيم r_1 الأكبر من أو التي تساوي الصفر هي التي تكون واقعية منطقية، و قيم R المنطقية هي بين 0 و 20.

الربط مع الحياة

تقوم قوات خفر السواحل بعمليات المراقبة والحراسة الحدودية والإنقاذ وتقديم المساعدة لمستخدمي المياه الإقليمية في المملكة.

تحقق من فهمك

2) رواتب: تستعمل إحدى الشركات الدالة $S(x) = \frac{13500x + 250}{x + 1}$ لحساب راتب موظف خلال السنة x من عمله لديها، مثّل هذه الدالة بيانيًّا. وحدد القيم المنطقية لمجال الدالة ومداها في سياق المسألة، وعلى ماذا يدل خط التقارب الأفقي في هذه المسألة؟

نقطة الانفصال يوجد في بعض الأحيان **نقط انفصال** في التمثيل البياني للدالة النسبية، وتظهر هذه النقط على شكل فجوات في التمثيل البياني للدالة؛ لأن الدالة تكون غير معرّفة عند تلك النقاط ومعرفة حولها.

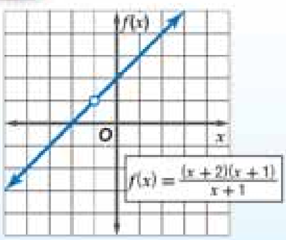
مفهوم أساسي — نقطة الانفصال

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $b(x) \neq 0$، و كان $x - c$ عاملًا مشتركًا بين $a(x)$ و $b(x)$، فإنه توجد نقطة انفصال عندما $x = c$.

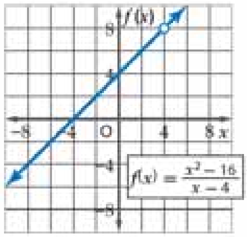
مثال:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$
$$= x + 2, \quad x \neq -1$$



مثال 3 التمثيل البياني لدالة تتضمن نقطة انفصال

مثّل الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ بيانيًا.



لاحظ أن مجال الدالة $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 4

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x + 4)\cancel{(x - 4)}^{1}}{\cancel{x - 4}_{1}} = x + 4$$

لذا، فإن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ هو نفسه التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 4$، مع وجود فجوة في التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 4$ عندما $x = 4$.

تنبيه !

فجوات التمثيل البياني تذكر أن وجود عامل مشترك بين البسط والمقام يدل على وجود فجوة في التمثيل البياني للدالة.

تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

3A) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$

3B) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 9}$

تأكـد

مثال 1 مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$

2) $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$

مثال 2

3) **كرة سلة :** في بداية تدريب لفريق كرة سلة، أحرز سعيد 7 أهداف من 11 رمية حرة لعبها، ويرغب في تحسين النسبة المئوية للأهداف التي يحرزها والممثلة بالدالة $P(x) = \frac{7 + x}{11 + x}$، حيث x عدد الرميات الحرة الأخرى التي سيلعبها.

a) مثّل هذه الدالة بيانيًّا.

b) أي جزء من التمثيل البياني للدالة منطقي في سياق المسألة؟

c) ماذا يمثل مقطع المحور الرأسي للتمثيل البياني.

d) ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ وما النسبة المئوية التي يمثلها؟ وهل يمكن الوصول إلى هذه النسبة؟

مثال 3 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

4) $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$

5) $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x + 4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

6) $f(x) = \frac{x^2}{6x + 12}$

7) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 1}$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

8) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$

9) $f(x) = \frac{5}{(x - 1)(x + 4)}$

10) $f(x) = \frac{1}{(x + 4)^2}$

11) $f(x) = \frac{2x}{(x + 2)(x - 5)}$

12) $f(x) = \frac{4}{(x - 2)^2}$

13) $f(x) = \frac{x - 3}{x + 1}$

14) **كهرباء:** دائرة كهربائية تحتوي 3 مقاومات موصولة على التوالي، تُعطى شدة التيار الكهربائي بالأمبير فيها بالمعادلة $I = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$، حيث V فرق الجهد بالفولت، و R_1, R_2, R_3 المقاومات بالأوم.

a) إذا كان R_1 هو المتغير المستقل، و I هو المتغير التابع، فمثل المعادلة بيانيًا عندما تكون $V = 120\text{ v}, R_2 = 25\,\Omega, R_3 = 75\,\Omega$.

b) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي، وأوجد مقطع المحور R_1، و مقطع المحور I للتمثيل البياني.

c) أوجد قيمة I عندما تكون $R_1 = 140\,\Omega$.

d) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

مثال 3 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

15) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

16) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$

17) $f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8}$

18) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

19) $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 9x + 20}$

20) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x}$

21) $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$

22) **اتصالات:** اشترى أحمد هاتفًا محمولًا مزودًا بخدمة إنترنت، وكان ثمن الهاتف 1500 ريال، ومتوسط تكلفة مكالماته الشهرية 300 ريال بالإضافة إلى 100 ريال شهريًا لخدمة الإنترنت. إذا علمت أن التكلفة الشهرية لأحمد تشمل: ثمن الهاتف، ومتوسط تكلفة المكالمات، وثمن خدمة الإنترنت.

a) اكتب دالة نسبية تمثل متوسط التكلفة الشهرية لأحمد، بعد مرور x شهرًا من شراء الهاتف، ومثّلها بيانيًا.

b) اكتب معادلات خطوط تقارب التمثيل البياني للدالة؟

c) لماذا يكون الربع الأول من المستوى الإحداثي هو المهم في هذا الموقف؟

d) بعد كم شهر من شراء الهاتف يكون متوسط التكلفة الشهرية لأحمد 450 ريالًا؟

الربط مع الحياة

تطورت تقنية الاتصالات بشكل مطرد في الآونة الأخيرة. فأصبح بالإمكان الاتصال بالإنترنت من أي مكان في العالم، عن طريق الهاتف المحمول. وفي المملكة أكثر من مزود لهذه الخدمة.

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

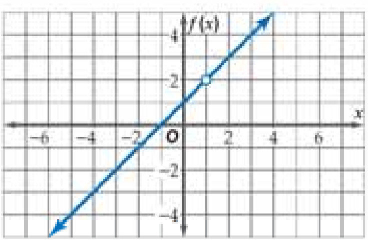
23) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$

24) $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 24}{x + 2}$

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **مسألة مفتوحة:** مثّل بيانيًا بشكل تقريبي دالة نسبية لها خط تقارب أفقي معادلته $y = 1$، وخط تقارب رأسي معادلته $x = -2$.

26) **تحدٍّ:** اكتب دالة نسبية لها التمثيل البياني المجاور.



27) **تبرير:** ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالتين: $f(x) = x - 2, g(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{x+3}$؟

28) **برهان:** إذا علمت أن الدالة النسبية هي دالة على الصورة: $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$، فأثبت أن $f(x) = \frac{x}{a-b} + c$ دالة نسبية.

29) **اكتب:** وضح كيف يمكن استعمال تحليل البسط والمقام إلى عوامل لإيجاد خطوط التقارب الرأسية أو نقطة الانفصال لدالة نسبية.

تدريب على اختبار

30) يريد علي أن يختار كتابين معًا من بين 6 كتب مختلفة. بكم طريقة يمكنه القيام بذلك؟

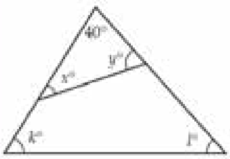
A 48

B 18

C 15

D 12

31) **هندسة:** في الشكل المجاور، ماقيمة $x + y + k + l$ ؟



A 140

B 280

C 320

D 360

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كل منها: (الدرس 3-5)

32) $f(x) = \frac{-5}{x+2}$

33) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$

34) $f(x) = \frac{1}{x+6} + 1$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 2-5)

35) $\frac{m}{m^2-4} + \frac{2}{3m+6}$

36) $\frac{d-4}{d^2+2d-8} + \frac{d+2}{d^2-16}$

37) $\frac{y}{y+3} - \frac{6y}{y^2-9}$

38) $\frac{5}{x^2-3x-28} + \frac{7}{2x-14}$

39) **سفر:** يبين الجدول المجاور المسافات التي يقطعها أحمد عند سفره إلى مدينة مجاورة بعد مرور زمن معين. (مهارة سابقة)

a) أوجد معدل تغير المسافة بين الساعتين الأولى والثالثة من الانطلاق.

b) أوجد معدل تغير المسافة بعد مرور 5 ساعات من الانطلاق.

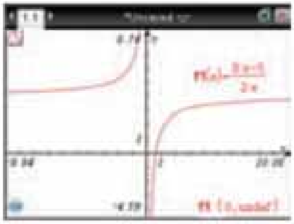
الزمن (h)	المسافة (mi)
0	0
1	55
2	110
3	165
4	165
5	225

توسع

5-4 معمل الحاسبة البيانية
تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوال النسبية.

نشاط 1 التمثيل البياني لدالة لها خطوط تقارب



مثّل الدالة $y = \frac{8x-5}{2x}$ بيانيًّا في نافذة العرض القياسية، وأوجد معادلات خطوط التقارب:

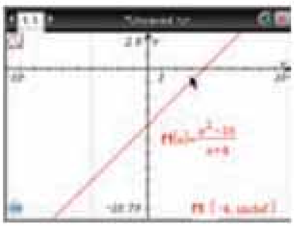
الخطوة 1: لتمثيل الدالة اضغط على المفاتيح:

+ ctrl 2:Add Graphs ثم اكتب الدالة واضغط enter، ولتحديد خط التقارب الرأسي اضغط على المفاتيح: 1:Graph Trace 5:Trace menu، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، فستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لـ y عندما $x = 0$، وتظهر النقطة $(0, \text{undef})$ وخط التقارب الرأسي.

الخطوة 2: اختبر التمثيل البياني.

بالنظر إلى المعادلة، يمكننا معرفة أن الدالة غير معرفة عندما $x = 0$، لذا فإن لها خط تقارب رأسيًّا معادلته $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y عندما تزداد قيم x وعندما تقل. لعلك لاحظت أن قيم y تقترب من العدد 4 في الحالتين، وعليه يكون للدالة خط تقارب أفقي معادلته $y = 4$.

نشاط 2 التمثيل البياني لدالة تتضمن نقطة انفصال



مثّل الدالة $y = \frac{x^2-16}{x+4}$ بيانيًّا

الخطوة 1: لتمثيل الدالة اضغط المفاتيح:

+ ctrl 2:Add Graphs ثم اكتب الدالة واضغط enter، ولتحديد نقاط الانفصال اضغط المفاتيح: 3:Trace Step... 5:Trace menu، وحوّل إلى القيمة 0.1، ثم اضغط المفاتيح: 1:Graph Trace 5:Trace menu، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، فستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لـ y عند $x = -4$ وتظهر فجوة عند نقطة الانفصال $(-4, \text{undef})$

الخطوة 2: اختبر التمثيل البياني.

يبدو التمثيل البياني على شكل مستقيم بفجوة عندما $x = -4$؛ لأن المقام يساوي صفرًا عندما $x = -4$، مما يعني أن الدالة غير معرّفة عندما $x = -4$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، واكتب الإحداثي x لنقاط الانفصال ومعادلات خطوط التقارب (إن وجدت):

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

3) $f(x) = \frac{2}{x-4}$

4) $f(x) = \frac{2x}{3x-6}$

5) $f(x) = \frac{4x+2}{x-1}$

6) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$

5-5 دوال التغيُّر
Variation Functions

فيما سبق:
درست كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا.

والآن:
- أميز مسائل التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك وأحلها.
- أميز مسائل التغيُّر العكسي والتغيُّر المركب وأحلها.

المفردات:
التغيُّر الطردي
direct variation

ثابت التغيُّر
constant of variation

التغيُّر المشترك
joint variation

التغيُّر العكسي
inverse variation

التغيُّر المركب
combined variation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

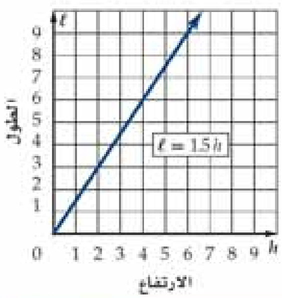
وجد عبدالله خلال بنائه منحدرًا للتزحلق أن أنسب المنحدرات هي التي يكون فيها طول المنصة ℓ مساويًا 1.5 مرة من ارتفاعها h .

كما تلاحظ من الجدول المجاور، فإن طول المنصة يعتمد على ارتفاعها، حيث يزداد الطول كلما ازداد الارتفاع بينما تبقى النسبة ثابتة.

المعادلة $\frac{\ell}{h} = 1.5$ يمكن كتابتها على الصورة $\ell = 1.5h$، وبهذا فإن طول المنصة يتغيَّر طرديًا مع ارتفاعها.

الطول (ℓ)	الارتفاع (h)	النسبة $(\frac{\ell}{h})$
3	2	1.5
6	4	1.5
9	6	1.5
12	8	1.5

التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك إن العلاقة المعطاة بالمعادلة $\ell = 1.5h$ مثال على التغيُّر الطردي، حيث يعبر عن **التغيُّر الطردي** بمعادلة على الصورة $y = kx$ ، ويُسمى k في هذه المعادلة **ثابت التغيُّر**.



لاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $\ell = 1.5h$ هو مستقيم يمر بنقطة الأصل، لذا فالتغيُّر الطردي حالة خاصة من معادلة مستقيم مكتوبة على الصورة $y = mx + b$ ، حيث $m = k$ و $b = 0$. وهذا يعني أن ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيُّر الطردي هو ثابت التغيُّر.

وللتعبير عن التغيُّر الطردي فإننا نقول إن y تتغيَّر طرديًا مع x. وبمعنى آخر كلما زادت x فإن y تزداد أو تنقص بنسبة ثابتة.

مفهوم أساسي — التغيُّر الطردي
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيَر y طرديًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.
ويسمى العدد k ثابت التغيُّر.

مثال: إذا كان $x = 7$ ، $y = 3x$ ، فإن $y = 3(7) = 21$.

إرشادات للدراسة
ثابت التغيُّر
في التغير الطردي، المستقيم الذي له ثابت تغيُّر موجب ، يكون صاعدًا إلى أعلى من اليسار إلى اليمين ، بينما المستقيم الذي له ثابت تغيُّر سالب، فإنه يكون هابطًا نحو الأسفل من اليسار إلى اليمين.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًا مع x ، وعُلمت بعض القيم فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = kx_1 \quad , \quad y_2 = kx_2$$
$$\frac{y_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$ (يسمّى هذا التناسب تناسبًا طرديًا؛ أي أن y تتناسب طرديًا مع x).

يمكن استعمال خصائص المساواة لإيجاد تناسبات أخرى تربط بين قيم x و قيم y .

مثال 1 التغيُّر الطردي

إذا كانت y تتغيَّر طرديًا مع x ، وكانت $y = 15$ عندما $x = -5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 7$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$ تناسب طردي

$$\frac{15}{-5} = \frac{y_2}{7}$$ $y_1 = 15, x_1 = -5, x_2 = 7$

$$15(7) = -5(y_2)$$ بالضرب التبادلي

$$105 = -5y_2$$ بالتبسيط

$$-21 = y_2$$ بقسمة كلا الطرفين على -5

تحقق من فهمك

1) إذا كانت r تتغيَّر طرديًا مع t ، وكانت $r = -20$ عندما $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = -6$.

هناك نوع آخر من التغيُّر يُسمى **التغيُّر المشترك**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

مفهوم أساسي التغيُّر المشترك

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيّر y تغيُّرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.

مثال: إذا كان $y = 5xz, \; x = 6, z = -2$ ، فإن $y = 5(6)(-2) = -60$.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المشترك
يصنّف بعض الرياضيين التغيُّر المشترك بوصفه حالة خاصة من التغيُّر المركب الذي ستدرسه لاحقًا.

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z ، وعُلمت بعض القيم فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_2 = kx_2z_2 \quad , \quad y_1 = kx_1z_1$$
$$\frac{y_2}{x_2z_2} = k \qquad \frac{y_1}{x_1z_1} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا مشتركًا، أي أن y تتناسب طرديًا مع حاصل ضرب x ، z).

مثال 2 التغيُّر المشترك

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = 2$ ، إذا علمت أن $y = 20$ عندما $z = 3$ و $x = 5$.

استعمل تناسبًا يربط القيم بعضها ببعض.

$$\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$$ تناسب مشترك

$$\frac{20}{5(3)} = \frac{y_2}{9(2)}$$ $y_1 = 20, x_1 = 5, z_1 = 3, x_2 = 9, z_2 = 2$

$$20(9)(2) = 5(3)(y_2)$$ بالضرب التبادلي

$$360 = 15y_2$$ بالتبسيط

$$24 = y_2$$ بقسمة كلا الطرفين على 15

تحقق من فهمك

2) إذا كانت r تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع v و t ، وكانت $r = 70$ عندما $v = 10$ و $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $v = 2$ ، و $t = 8$.

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركب هناك نوع آخر من التغيُّر هو **التغيُّر العكسي**، فإذا تغيَّرت الكميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا k.

نقول إن كميتين موجبتين تتغيَّران عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغيَّر السرعة والزمن اللازمان لقطع مسافة ثابتة تغيُّرًا عكسيًّا؛ فكلما زادت السرعة قلّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

مفهوم أساسي — التغيُّر العكسي

أضف إلى مطويتك

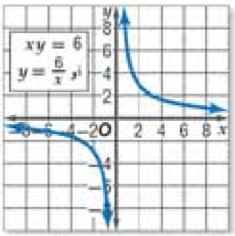
التعبير اللفظي: تتغيَّر y عكسيًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$، بحيث

$x\,y = k$ أو $y = \frac{k}{x}$ حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$

مثال: إذا كانت $xy = 2$ ، $x = 6$، فإن $y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x، بحيث $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$،

فإن التمثيل البياني لهذه المعادلة كما في الشكل المجاور.



وبما أن k عدد موجب فإن قيم y تتناقص بازدياد قيم x .

لاحظ أن التمثيل البياني للتغيُّر العكسي يشبه تمامًا التمثيل البياني لدالة المقلوب.

يمكن استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن تغيُّرًا عكسيًّا معطى فيها بعض القيم، والتناسب الآتي هو أحد التناسبات التي يمكن تكوينها.

$x_1 y_1 = k$ ، $x_2 y_2 = k$

$x_1 y_1 = x_2 y_2$ بالتعويض عن قيمة k من إحدى المعادلتين في الأخرى

$\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ بقسمة كلا الطرفين على $y_1 y_2$

(يسمى هذا التناسب تناسبًا عكسيًّا؛ أي أن y تتناسب عكسيًّا مع x).

إرشادات للدراسة

التغيُّر الطردي والتغيُّر العكسي

يمكن تحديد نوع التغيُّر من خلال جدول قيم لـ x و y. فإذا كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر طردي. أما إذا كانت xy تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر عكسي.

مثال 3 التغيُّر العكسي

إذا كانت a تتغيَّر عكسيًّا مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = -2$، فأوجد قيمة a عندما $b = -10$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$\frac{a_1}{b_2} = \frac{a_2}{b_1}$ تناسب عكسي

$\frac{28}{-10} = \frac{a_2}{-2}$ $a_1 = 28, b_1 = -2, b_2 = -10$

$28(-2) = -10(a_2)$ بالضرب التبادلي

$-56 = -10(a_2)$ بالتبسيط

$5\frac{3}{5} = a_2$ بقسمة كلا الطرفين على -10

تحقق من فهمك

3) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y، وكانت $x = 24$ عندما $y = 4$، فأوجد قيمة x عندما $y = 12$.

يستعمل التغيُّر العكسي في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة التغير العكسي وحله

موجات الصوت: **يتغيَّر التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود عكسيًّا مع طول السلك. فإذا كان التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود طوله 10 in يساوي 512 دورة في الثانية فأوجد تردد سلك مشدود طوله 8 in .**

افرض أن $l_2 = 8$ ، $l_1 = 10, f_1 = 512$ ، وأوجد قيمة f_2.

$l_1 f_1 = l_2 f_2$ المعادلة الأصلية

$10 \cdot 512 = 8 \cdot f_2$ $\quad f_1 = 512, l_1 = 10, l_2 = 8$

$\frac{5120}{8} = f_2$ بقسمة كلا الطرفين على 8

$640 = f_2$ بالتبسيط

إذن تردد السلك يساوي 640 دورة في الثانية.

تحقق من فهمك

4) يتغيَّر الطول الظاهري لجسم عكسيًّا مع بعد الناظر إلى الجسم. إذا كان بعد الأرض عن الشمس تقريبًا 93 مليون ميل، وبعد المشتري عن الشمس 483.6 مليون ميل، فكم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من الأرض مقارنة مع طول قطرها عند النظر إليها من المشتري؟

هناك نوع آخر من التغيُّر هو **التغيُّر المركب**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وy تتغيَّر عكسيًّا مع z ، وعلمت بعض القيم فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = \frac{kx_1}{z_1} \qquad , \qquad y_2 = \frac{kx_2}{z_2}$$

$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = k \qquad\qquad \frac{y_2 z_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمّى هذا التناسب تناسبًا مركبًا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع x وعكسيًّا مع z).

مثال 5 — التغيُّر المركب

إذا كانت f تتغيَّر طرديًّا مع g وعكسيًّا مع h . وكانت $g = 24$ عندما $h = 2$ و $f = 6$ ، فأوجد قيمة g عندما $f = 18$ و $h = -3$.

كوّن أولًا تناسبًا صحيحًا للمعلومات المعطاة.

$f_1 = \frac{kg_1}{h_1}$ و $f_2 = \frac{kg_2}{h_2}$ — g تتغيَّر طرديًّا مع f ، لذا فإن g تكون في البسط، h تتغيَّر عكسيًّا مع f ، لذا فإن h تكون في المقام

$k = \frac{f_1 h_1}{g_1}$ و $k = \frac{f_2 h_2}{g_2}$ بحل كل من المعادلتين بالنسبة لـ k

$\frac{f_1 h_1}{g_1} = \frac{f_2 h_2}{g_2}$ بمساواة النسبتين

$\frac{6(2)}{24} = \frac{18(-3)}{g_2}$ $\quad f_1 = 6, g_1 = 24, h_1 = 2, f_2 = 18, h_2 = -3$

$24(18)(-3) = 6(2)(g_2)$ بالضرب التبادلي

$-1296 = 12g_2$ بالتبسيط

$-108 = g_2$ بقسمة كلا الطرفين على 12

عندما تكون $f = 18$ ، و $h = -3$ ، تكون قيمة g هي -108 .

تحقق من فهمك

5) إذا كانت p تتغيَّر طرديًّا مع r وعكسيًّا مع t ، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$ ، و $r = 2$. فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$ ؟

إرشادات للدراسة

التغيُّر المركب

تظهر الكميات التي تتغيَّر طرديًّا في البسط. أما التي تتغيَّر عكسيًّا فتظهر في المقام.

تأكـد

الأمثلة 3–1 (1 إذا كانت y تتغيّر طرديًا مع x، وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$، فأوجد قيمة y عندما $x = 14$.

(2 إذا كانت y تتغيّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y = -50$ عندما $z = 5$ و $x = -10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = -3$.

(3 إذا كانت y تتغيّر عكسيًا مع x ، وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 9$.

مثال 4 (4 **خرائط:** إذا كانت مسافة 2 in على إحدى الخرائط تعادل 15 mi على سطح الأرض. وكانت المسافة بين نقطتين تمثلان مدينتين على الخريطة 12 in، فأوجد المسافة الحقيقية بينهما.

مثال 5 (5 إذا كانت a تتغيّر طرديًا مع b، وعكسيًا مع c، وكانت $b = 16$ عندما $c = 2$ و $a = 4$ ، فأوجد قيمة b عندما $a = 8$ و $c = -3$.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا كانت x تتغيّر طرديًا مع y ، فأوجد قيمة x عندما $y = 8$ في كل من الحالتين الآتيتين:

(6 إذا كانت $x = 6$، عندما $y = 32$.

(7 إذا كانت $x = 11$، عندما $y = -3$.

(8 **فضاء:** إذا كان وزن جهاز استكشاف على الأرض 360 رطلًا ، ووزنه على سطح القمر 60 رطلًا ، فاكتب معادلة تربط بين وزن جسم w على سطح الأرض ووزنه m على سطح القمر.

مثال 2 إذا كانت a تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع b و c فأوجد قيمة a عندما $b = 4$ و $c = -3$ في كل من الحالتين الآتيتين:

(9 إذا كانت $a = -108$، عندما $b = 2$ و $c = 9$.

(10 إذا كانت $a = 24$، عندما $b = 8$ و $c = 12$.

مثال 3 إذا كانت f تتغيّر عكسيًا مع g ، فأوجد قيمة f عندما $g = -6$ في كل من الحالتين الآتيتين:

(11 إذا كانت $f = -12$ ، عندما $g = 19$.

(12 إذا كانت $f = 0.6$ ، عندما $g = -21$.

مثال 4 (13 **طيور:** عندما يهاجر سرب من الطيور من مكان إلى آخر كل عام يقطع مسافة تتغيّر طرديًا مع الزمن الذي يقضيه في الطيران.

a) إذا قطع سرب الطيور مسافة 375 mi في 7.5 h ، فاكتب معادلة تغيُّر طردي تمثل هذا الموقف.

b) إذا قطع سرب الطيور مسافة 3000 mi خلال هجرته، فأوجد عدد ساعات طيرانه.

مثال 5 (14 إذا كانت x تتغيّر طرديًا مع y ، وعكسيًا مع z، وكانت $z = 20$، عندما $x = 6$ و $y = 14$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 10$ و $y = -7$.

حدد إذا كانت كل علاقة ممثلة في الجداول أدناه تمثل تغيّرًا طرديًا، أو تغيّرًا عكسيًا، أو غير ذلك:

(15

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

(16

x	y
8	2
4	4
−2	−8
−8	−2

(17

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25

(18 إذا كانت x تتغيّر عكسيًا مع y، وكانت $x = 16$ عندما $y = 5$ فأوجد قيمة x عندما $y = 20$.

حدد إذا كانت المعادلة في كل مما يأتي تمثل تغيّرًا طرديًا، أو عكسيًا، أو مشتركًا، أو مركبًا، ثم أوجد ثابت التغيُّر (التناسب) في كل منها :

(19 $a = 27b$

(20 $c = \frac{7}{d}$

(21 $-10 = gh$

(22 $m = 20cd$

23) **كيمياء:** يتغيَّر حجم غاز معين v طرديًّا مع درجة حرارته t، وعكسيًّا مع ضغطه p حيث $(v = \frac{kt}{p})$.

a) هل تمثل المعادلة تغيُّرًا طرديًّا، أم عكسيًّا أم مشتركا أم مركبًا؟

b) عينة من الغاز حجمها 8 L، ودرجة حرارتها 275° K، وضغطها 1.25 وحدة ضغط جوي، تم ضغطها ليصبح حجمها 6 L وتسخينها إلى درجة حرارة 300° K. كم يصبح ضغط الغاز عندئذ؟

24) **جاذبية:** ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة الجذب F بالنيوتن بين أي جسمين تتغيّر طرديًّا مع حاصل ضرب كتلتيهما بالكيلو جرام m_1 و m_2، وعكسيًّا مع مربع المسافة بينهما d بالمتر. وتبين المعادلة $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$ هذه العلاقة، حيث G ثابت الجاذبية العام، وقيمته $6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$.

a) إذا كانت المسافة بين الأرض والقمر 3.84×10^8 m تقريبًا، وكتلة القمر 7.36×10^{22} kg، وكتلة الأرض 5.97×10^{24} kg، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل منهما في الآخر؟

b) إذا كانت المسافة بين الأرض والشمس 1.5×10^{11} m تقريبًا، وكتلة الشمس 1.99×10^{30} kg تقريبًا، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل من الشمس والأرض في الآخر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** يحل كل من يوسف وتركي مسألة عن التغيُّر المركب، تتغيّر فيها z طرديًّا مع x وعكسيًّا مع y. أيهما توصل إلى التناسب الصحيح؟ وضح إجابتك.

يوسف

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1}, z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$
$$k = \frac{z_1y_1}{x_1}, k = \frac{z_2y_2}{x_2}$$
$$\frac{z_1y_1}{x_1} = \frac{z_2y_2}{x_2}$$

تركي

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1}, z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$
$$k = \frac{z_1x_1}{y_1}, k = \frac{z_2x_2}{y_2}$$
$$\frac{z_1x_1}{y_1} = \frac{z_2x_2}{y_2}$$

26) **تبرير:** وضح لماذا يعد بعض المختصين في الرياضيات التغيّر المشترك تغيُّرًا مركبًا، ولكنهم لا يعدون التغيُّر المركب مشتركًا.

27) **مسألة مفتوحة:** صف ثلاث كميات من واقع الحياة تتغيّر تغيُّرًا مشتركًا فيما بينها.

28) **اكتب:** حدد أنواع التغيُّرات التي لا يمكن أن يكون الصفر أحد قيمها. وضح إجابتك.

تدريب على اختبار

29) إذا كانت a تتغيّر طرديًّا مع b، وعكسيًّا مع c، وكانت $b = 15$ عندما $c = 2$، $a = 4$ فما قيمة b عندما $a = 7$، $c = -8$؟

A $\frac{-1}{105}$ **C** $\frac{1}{105}$

B -105 **D** 105

30) ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضحة بالجدول المجاور؟

A طردي   **C** مشترك

B عكسي   **D** مركب

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

مراجعة تراكمية

حدد خطوط التقارب الرأسية ونقط الانفصال (إن وجدت) في التمثيل البياني لكل دالة نسبية مما يأتي: (الدرس 5-4)

31) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ 32) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 3x - 4}$ 33) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$

أوجد LCM لكل مما يأتي: (الدرس 5-2)

34) $a, 2a, a + 1$ 35) $8, 24x, 12$ 36) $x^4, 3x^2, 2xy$

5-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية
Solving Rational Equations and Inequalities

فيما سبق:

درست تبسيط عبارات نسبية.

والآن:

- أحل معادلات نسبية.
- أحل متباينات نسبية.

المفردات:

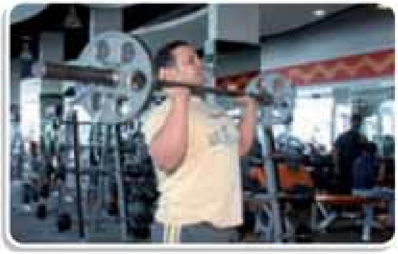
المعادلة النسبية
rational equation

الوسط الموزون
weighted average

المتباينة النسبية
rational inequality

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



يبلغ رسم العضوية في أحد الأندية الرياضية 200 ريال شهريًّا بالإضافة إلى 10 ريالات عند كل زيارة للنادي. فإذا كان أحد الأعضاء يزور النادي x مرة شهريًّا، فإنه سيدفع مبلغًا مقداره $(200+10x)$ ريالًا في الشهر. ويمكن حساب التكلفة الفعلية لكل زيارة للعضو باستعمال العبارة :

$\frac{200+10x}{x}$ ، حيث x عدد مرات زيارة النادي.

ولحساب عدد مرات زيارة أحد الأعضاء للنادي إذا كانت التكلفة الفعلية للزيارة الواحدة 30 ريالًا، عليك أن تحل المعادلة $30 = \frac{200+10x}{x}$.

حل المعادلات النسبية تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر **معادلة نسبية**، ويكون حل هذه المعادلة عادة أسهل عندما تتخلص من المقامات، وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM لها.

ومن الممكن الحصول على حلول دخيلة عند ضرب طرفي المعادلة النسبية في LCM للمقامات.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حُلّ المعادلة $\frac{3}{x+3} = \frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15}$ ، وتحقق من صحة حلك.

LCM للمقامات هو $(x+3)(x+5)$.

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$$ بضرب المعادلة في LCM للمقامات

$$\frac{(x+3)\overset{1}{\cancel{(x+5)}}(2x)}{\underset{1}{\cancel{x+5}}} - \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}\overset{1}{\cancel{(x+5)}}(x^2-x-10)}{\underset{1}{\cancel{x^2+8x+15}}} = \frac{(x+5)\overset{1}{\cancel{(x+3)}}3}{\underset{1}{\cancel{x+3}}}$$ باختصار العوامل المشتركة

$$(x+3)(2x) - (x^2-x-10) = 3(x+5)$$ بالتبسيط

$$2x^2+6x-x^2+x+10 = 3x+15$$ خاصية التوزيع

$$x^2+7x+10 = 3x+15$$ بالتبسيط

$$x^2+4x-5 = 0$$ بطرح $3x + 15$ من كلا الطرفين

$$(x+5)(x-1) = 0$$ بالتحليل إلى العوامل

$$x+5=0 \text{ أو } x-1=0$$ خاصية الضرب الصفري

$$x=-5 \quad \text{أو} \quad x=1$$

تحقق: اختبر $x = -5$

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2 - (-5) - 10}{(-5)^2 + 8(-5) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$$

$$\frac{-10}{0} - \frac{25 + 5 - 10}{25 - 40 + 15} \neq -\frac{3}{2} \ \text{✗}$$

اختبر $x = 1$

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2 - 1 - 10}{1^2 + 8(1) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$$

$$\frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{24} + \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \ \checkmark$$

إذا نتج عن تعويض أحد الحلول صفر في أحد مقامات المعادلة، وجب استثناء هذا الحل. وبما أن $x = -5$ ينتج عن تعويضها في المعادلة صفر في المقام فإنها تُستثنى من الحلول. لذا يكون الحل هو $x = 1$.

مراجعة المفردات

الحل الدخيل
هو الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

تحقق من فهمك

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

(1A $\frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6}$ (1B $\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1}$

(1C $\frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2}$ (1D $\frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{p^2+2p-8} + \frac{2}{p+4}$

الوسط الموزون هو طريقة لإيجاد الوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد يكون لبعضها أهمية أو وزن أكثر من غيرها. وهناك الكثير من التطبيقات والمسائل الحياتية التي يمكن حلها باستعمال المعادلات النسبية.

مثال 2 من واقع الحياة — مسألة كيمياء

كيمياء: أجرى فريد تجربة في معمل الكيمياء، فأضاف محلولًا يحتوي على حمض بنسبة 70% إلى 12 ml من محلول آخر نسبة الحمض فيه 15%. كم مللترًا من المحلول الذي نسبة الحمض فيه 70% يجب إضافته للحصول على محلول نسبة الحمض فيه 60%؟

افهم: يجب على فريد معرفة كمية المحلول الواجب إضافتها إلى المحلول الأصلي للحصول على المحلول الجديد.

خطط: يحتوي كل من المحلولين على حمض بنسبة معينة. ونسبة الحمض في المحلول الناتج يجب أن تساوي كمية الحمض مقسومة على الحجم الكلي للمحلول.

	المحلول المضاف	المحلول الأصلي	المحلول الناتج
كمية الحمض	$0.7(x)$	$0.15(12)$	$0.7x + 0.15(12)$
الحجم الكلي للمحلول	x	12	$x + 12$

$$\text{النسبة المئوية للحمض في المحلول} = \frac{\text{كمية الحمض}}{\text{الحجم الكلي للمحلول}}$$

حُل:

$$\frac{\text{كمية الحمض}}{\text{الحجم الكلي للمحلول}} = \frac{60}{100}$$ بكتابة التناسب

$$\frac{0.7x + 0.15(12)}{x + 12} = \frac{60}{100}$$ بالتعويض

$$\frac{0.7x + 1.8}{x + 12} = \frac{60}{100}$$ بتبسيط البسط

$$100(x + 12)\frac{60}{100} = 100(x + 12)\frac{0.7x + 1.8}{x + 12}$$ LCM للمقامات هو $100(x + 12)$ بضرب كلا الطرفين في LCM للمقامات

$$\cancel{100}(x + 12)\frac{60}{\cancel{100}} = 100\cancel{(x + 12)}\frac{0.7x + 1.8}{\cancel{x + 12}}$$ باختصار العوامل المشتركة

$$(x + 12)60 = 100(0.7x + 1.8)$$ بالتبسيط

$$60x + 720 = 70x + 180$$ خاصية التوزيع

$$540 = 10x$$ بطرح $60x + 180$ من كلا الطرفين

$$54 = x$$ بالقسمة على 10

تحقق:

$$\frac{60}{100} = \frac{0.7x + 0.15(12)}{x + 12}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{60}{100} \stackrel{?}{=} \frac{0.7(54) + 0.15(12)}{54 + 12}$$ $x = 54$

$$\frac{60}{100} \stackrel{?}{=} \frac{39.6}{66}$$ بالتبسيط

$$0.6 = 0.6 \checkmark$$ بالتبسيط

يحتاج فريد إلى إضافة 54 ml من المحلول الذي نسبة الحمض فيه 70% للحصول على المحلول المطلوب.

تحقق من فهمك

2) لدى علياء 150 ml عصير بتركيز 10%، وتريد الحصول على عصير بتركيز 35%، وذلك بإضافة عصير تركيزه 65% كم مللترًا يجب أن تضيف للحصول على العصير ذي التركيز المطلوب؟

إرشادات للدراسة

جداول تكوين الجداول - كما في المثال 3 - يفيد في تنظيم وحل المسائل بشكل عام.

يمكن استعمال المعادلة التي تربط بين المسافة والسرعة والزمن لحل كثير من المعادلات النسبية. وأكثر الأشكال شيوعًا لهذه المعادلة هو $d = rt$. وكذلك يمكن استعمال الشكلين الآخرين، وهما: $t = \frac{d}{r}$ ، $r = \frac{d}{t}$.

إرشادات للدراسة

مسائل المسافة عندما تتضمن مسائل المسافة الذهاب والعودة فإن المسافة في الذهاب تساوي المسافة في العودة، ما لم يذكر خلاف ذلك.

مثال 3 من واقع الحياة — مسألة مسافة

تجديف: ركب سعيد قاربًا سرعته في المياه الراكدة 6 mi/h وسار به دون توقف مسافة 10 mi نصفها في اتجاه التيار ونصفها الآخر عكسه، فاستغرق زمنًا قدره 3 h، أوجد سرعة التيار.

افهم: معطيات المسألة هي: سرعة القارب في المياه الراكدة، وكذلك المسافة التي قطعها ذهابًا وإيابًا والزمن المستغرق في قطع المسافة كاملةً. والمطلوب إيجاد سرعة التيار (v).

خطط: المسافة التي قطعها سعيد هي 5 mi في اتجاه التيار، و 5 mi في عكس اتجاه التيار.
والمعادلة التي تُستعمل للحل هي:
$d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$ ، حيث r السرعة، d المسافة، t الزمن.

الزمن الكلي	الزمن مع اتجاه التيار	الزمن عكس اتجاه التيار
3h	$\frac{5}{6+v}$	$\frac{5}{6-v}$

حل: $\frac{5}{6+v} + \frac{5}{6-v} = 3$ — كتابة المعادلة

$(6+v)(6-v)\frac{5}{6+v} + (6+v)(6-v)\frac{5}{6-v} = (6+v)(6-v)(3)$ — بضرب كلا الطرفين في LCM للمقامات $(6+v)(6-v)$

$\cancel{(6+v)}_{1}(6-v)\frac{5}{\cancel{6+v}_{1}} + (6+v)\cancel{(6-v)}_{1}\frac{5}{\cancel{6-v}_{1}} = (6+v)(6-v)(3)$ — باختصار العوامل المشتركة

$(6-v)(5) + (6+v)(5) = (36-v^2)(3)$ — بالتبسيط

$30 - 5v + 30 + 5v = 108 - 3v^2$ — خاصية التوزيع

$60 = 108 - 3v^2$ — بالتبسيط

$0 = -3v^2 + 48$ — بطرح 60 من كلا الطرفين

$0 = -3(v+4)(v-4)$ — بالتحليل إلى العوامل

$0 = (v+4)(v-4)$ — بقسمة كلا الطرفين على -3

$v = 4$ أو $v = -4$ (مرفوض) — خاصية الضرب الصفري

تحقق: $\frac{5}{6+v} + \frac{5}{6-v} = 3$ — المعادلة الأصلية

$\frac{5}{6+4} + \frac{5}{6-4} \stackrel{?}{=} 3$ — $v = 4$

$\frac{5}{10} + \frac{5}{2} \stackrel{?}{=} 3$ — بالتبسيط

$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2}$ ✓ — بالتبسيط وتوحيد المقامات

وبما أن السرعة لا يمكن أن تكون سالبة فإن سرعة التيار هي 4 mi/h .

تحقق من فهمك

3) طيران: إذا قطعت طائرة مسافة 2368 mi في رحلة ذهاب وعودة دون توقف في 7h، وكانت سرعة الريح 20 mi/h ، فما سرعة الطائرة في الريح الساكنة؟

الربط مع الحياة

تمثل المخلفات البلاستيكية خطورة عالية وكارثة بيئية وصحية على الإنسان والحياة البرية والبحرية؛ لما بها من مواد كيميائية لا تتحلل في التربة، وتشمل العبوات البلاستيكية والأطعمة والمنظفات والمشروبات الغازية وغيرها.
وتستهلك الدول العربية منها 50 مليار عبوة سنويًا.

يمكن حل المسائل الحياتية التي تتعلق بالأعمال عادة باستعمال معادلات نسبية.

مثال 4 من واقع الحياة — مسألة تتعلق بالعمل

خدمة المجتمع: يقوم طلاب الصفين الثاني المتوسط والثاني الثانوي في أحد الأحياء بحملة توعية بخطر النفايات البلاستيكية لسكان الحي. فإذا علمت أن هذا العمل يحتاج إلى 24 ساعة إذا قام به طلاب الصف الثاني الثانوي، و18 ساعة عمل إذا قام به طلاب الصفين معًا، فكم ساعةً يحتاج طلاب الصف الثاني المتوسط للقيام بالعمل وحدهم؟

افهم: المعطيات هي: الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني الثانوي لإتمام العمل، والزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصفين معًا لإتمام العمل. والمطلوب إيجاد الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني المتوسط لإتمام العمل.

خطط: يستطيع طلاب الصف الثاني الثانوي إتمام العمل في 24h. وعليه فإن معدل عملهم يساوي $\frac{1}{24}$ من العمل في الساعة الواحدة.

في حين يبلغ معدل عمل طلاب الصف الثاني المتوسط $\frac{1}{j}$ من العمل في الساعة الواحدة، أما معدل عمل طلاب الصفين معًا فهو $\frac{1}{18}$ من العمل في الساعة الواحدة.

معدل عمل طلاب الصف الثاني المتوسط	معدل عمل طلاب الصف الثاني الثانوي	معدل عمل طلاب الصفين معًا
$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{18}$

حُل:

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$$ كتابة المعادلة

$$72j\frac{1}{24} + 72j\frac{1}{j} = 72j\frac{1}{18}$$ بضرب كلا الطرفين في LCM للمقامات وهو $72j$

$$\overset{3}{\cancel{72}}j\frac{1}{\underset{1}{\cancel{24}}} + 7\overset{1}{2}\cancel{j}\frac{1}{\underset{1}{\cancel{j}}} = \overset{4}{\cancel{72}}j\frac{1}{\underset{1}{\cancel{18}}}$$ باختصار العوامل المشتركة

$$3j + 72 = 4j$$ بالتبسيط

$$72 = j$$ بطرح $3j$ من كلا الطرفين

تحقق: هناك طريقتان للتحقق:

الطريقة 1: تعويض القيم

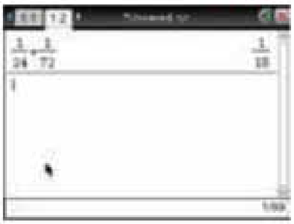
$$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{72} \stackrel{?}{=} \frac{1}{18}$$ $j = 72$

$$\frac{3}{72} + \frac{1}{72} \stackrel{?}{=} \frac{4}{72}$$ LCM للمقامات هو 72

$$\frac{4}{72} = \frac{4}{72} \checkmark$$ بالتبسيط

الطريقة 2: استعمال الحاسبة



يحتاج طلاب الصف الثاني المتوسط إلى 72h لإتمام العمل وحدهم.

تحقق من فهمك

4) يحتاج ناصر ومحمد إلى 6h لطلاء سور إذا عملا معًا، ويحتاج ناصر إلى 10h للقيام بالعمل وحده. كم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده؟

حل المتباينات النسبية **المتباينات النسبية**، هي المتباينات التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر. ولحلها اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي: حل المتباينات النسبية

أضف مطويتك

الخطوة 1: حدد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفرًا.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين؛ لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق أعدادها المتباينة.

مثال 5 حل متباينة نسبية

حل المتباينة النسبية $\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$.

الخطوة 1: القيمة المستثناة في هذه المتباينة هي 2.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة:

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+1}{4}$$ المعادلة المرتبطة

$$\overset{4}{\cancel{12}}(x-2)\frac{x}{\underset{1}{\cancel{3}}} - \overset{1}{12}\cancel{(x-2)}\frac{1}{\underset{1}{\cancel{x-2}}} = \overset{3}{\cancel{12}}(x-2)\frac{x+1}{\underset{1}{\cancel{4}}}$$ بالضرب بـ LCM للمقامات، $12(x-2)$

$$4x^2 - 8x - 12 = 3x^2 - 3x - 6$$ خاصية التوزيع

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$ بطرح $3x^2 - 3x - 6$ من كلا الطرفين

$$(x-6)(x+1) = 0$$ بالتحليل إلى العوامل

$x = 6$ أو $x = -1$ خاصية الضرب الصفري

إرشادات للدراسة

أكد للطلبة ضرورة استعمال القيم المستثناة وحلول المعادلة المرتبطة جميعها عند تقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 3: ارسم خطًا رأسيًا عند القيمة المستثناة، وعند حلّي المعادلة وذلك لتقسيم خط الأعداد إلى فترات

الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد ما إذا كانت الأعداد في الفترة تحقق المتباينة.

اختبر $x = -3$	اختبر $x = 0$	اختبر $x = 4$	اختبر $x = 8$
$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \overset{?}{<} \frac{-3+1}{4}$	$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \overset{?}{<} \frac{0+1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \overset{?}{<} \frac{4+1}{4}$	$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \overset{?}{<} \frac{8+1}{4}$
$-1 + \frac{1}{5} \overset{?}{<} -\frac{2}{4}$	$0 + \frac{1}{2} \overset{?}{<} \frac{1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \overset{?}{<} \frac{5}{4}$	$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \overset{?}{<} \frac{27}{12}$
$-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$ ✓	$\frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$	$\frac{5}{6} < \frac{5}{4}$ ✓	$\frac{30}{12} \not< \frac{27}{12}$

الجملة صحيحة عندما $x = -3,\ x = 4$. لذا فإن الحل هو $x < -1$ أو $2 < x < 6$.

تحقق من فهمك حل كلًّا من المتباينتين الآتيتين:

5A) $\frac{5}{x} + \frac{6}{5x} > \frac{2}{3}$

5B) $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$

تأكـد

مثال 1 حُل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

1) $\frac{4}{7} + \frac{3}{x-3} = \frac{53}{56}$

2) $\frac{7}{3} - \frac{3}{x-5} = \frac{19}{12}$

3) $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-4} = \frac{5}{x^2-9x+20}$

4) $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$

مثال 2

5) **كيمياء:** تضيف سارة محلولًا يحتوي على حمض بنسبة 80% إلى 5 ml من محلول نسبة الحمض فيه 20%. كم مللترًا من المحلول الذي نسبة الحمض فيه 80% يجب إضافته للحصول على محلول نسبة الحمض فيه 50% ؟

مثال 3

6) **مسافة:** قطع وليد مسافة 40 mi ذهابًا وعودة مستعملًا دراجته التي سرعتها 11.5 mi/h عندما يكون الريح ساكنًا، فإذا سار في اتجاه الريح زمنًا قدره ساعة و 20 دقيقة، وساعتان ونصف الساعة في عكس اتجاه الريح.

a) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره في اتجاه الريح.

b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره في عكس اتجاه الريح.

c) اكتب معادلة نسبية وحلها لإيجاد سرعة الريح.

مثال 4

7) يعمل كل من أحمد وعلي في التبليط، إذا كان أحمد يحتاج إلى 6 أيام لتبليط فناء منزل وحده، في حين يحتاج علي إلى 5 أيام للقيام بالعمل نفسه. فكم يومًا يحتاجان إليه إذا عملا معًا في تبليط هذا الفناء؟

مثال 5 حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

8) $3 - \frac{4}{x} > \frac{5}{4x}$

9) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-2} > \frac{x-4}{x-2}$

10) $\frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} > \frac{x}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

11) $\frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2-13x+42}$

12) $\frac{2}{y-5} + \frac{y-1}{2y+1} = \frac{2}{2y^2-9y-5}$

الأمثلة 4 - 2

13) **كيمياء:** كم مللترًا من محلول حمضي تركيزه 20% يجب إضافته إلى 40 ml من محلول حمضي آخر تركيزه 75% للحصول على محلول حمضي تركيزه 30% ؟

14) **بناء:** تحتاج مجموعة من العمال إلى 12 يومًا لبناء مرآب سيارات، في حين تحتاج مجموعة أخرى إلى 16 يومًا لإنجاز العمل نفسه، كم تحتاج المجموعتان معًا لبناء المرآب نفسه؟

15) **رحلة جوية:** سارت طائرة مسافة معينة في عكس اتجاه الريح في 20h ، واحتاجت إلى 16h لقطع المسافة نفسها في رحلة العودة، ولكن في اتجاه الريح. إذا كانت سرعة الطائرة في الريح الساكنة 500 mi/h ، فما سرعة الريح خلال الرحلة؟

مثال 5

16) حُلّ المتباينة: $\frac{3}{5x} + \frac{1}{6x} > \frac{2}{3}$ وتحقق من صحة حلك.

17) **تمثيلات متعددة:** افترض أن $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x-3}$.

a) **جبريًا:** حُلّ هذه المعادلة، وهل يوجد حل دخيل؟

b) **بيانيًا:** مثّل: $y_1 = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x}$ ، $y_2 = \frac{x-1}{x-3}$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0 < x < 5$.

c) **تحليليًا:** ما قيمة (قيم) x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان؟ وهل يتقاطعان عند الحل الدخيل للمعادلة الأصلية؟

d) **لفظيًا:** استعمل المعلومات التي حصلت عليها في الفرع (c) لتصف كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني للمعادلة لتحديد إذا كان أحد الحلول حلًّا دخيلًا.

18) حُلّ المعادلة: $\frac{2y-2}{y^2-y-12} = \frac{3}{4-y} - \frac{2}{y+3}$ ، وتحقق من صحة حلك.

مسائل مهارات التفكير العليا

19) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالاً على معادلة نسبية يمكن حلها بضرب طرفي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$.

20) **تحدٍّ:** حُلّ المعادلة $\frac{1 + \frac{9}{x} + \frac{20}{x^2}}{1 - \frac{25}{x^2}} = \frac{x+4}{x-5}$

21) **تبرير:** وضح لماذا يجب التحقق من حلول المعادلة النسبية؟

22) **اكتب:** عند استعمال ميزة TABLE في الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ فإن الحاسبة البيانية تعطي ERROR عند القيمتين $x = -2$ و $x = 3$. وضح ماذا يعني ذلك؟

تدريب على اختبار

23) ما حل المعادلة: $\frac{11}{a+2} - \frac{10}{a+5} = \frac{36}{a^2+7a+10}$ ؟

A -1 B $-\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{2}$ D 1

24) ما قيمة x في المعادلة $4 = \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)$ ؟

A -7 B $-\frac{1}{2}$ C $-\frac{1}{7}$ D 7

مراجعة تراكمية

25) حدد إذا كانت العلاقة المجاورة تمثل تغيرًا طرديًا، أم تغيرًا عكسيًا، أم غير ذلك: (الدرس 5-5)

x	14	28	56	112
y	3	1.5	0.75	0.375

26) مثّل الدالة $f(x) = \frac{x+4}{x^2+7x+12}$ بيانيًا. (الدرس 5-4)

27) اكتب الحدود الثلاثة التالية في المتتابعة: ... ,20 ,14 ,8 ,2 (مهارة سابقة)

توسع 5-6 معمل الحاسبة البيانية

حل المعادلات والمتباينات النسبية

Solving Rational Equations and Inequalities

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل معادلات نسبية بيانيًا أو باستعمال ميزة table.
مثّل طرفي المعادلة النسبية بيانيًا، ثم حدّد نقاط التقاطع.

نشاط 1 معادلة نسبية

حُلّ المعادلة $\frac{3}{2} = \frac{4}{x+1}$.

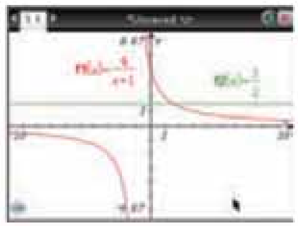
الخطوة 1 مثّل طرفي المعادلة بيانيًا

مثّل طرفي المعادلة بيانيًا كدالتين مستقلتين، وأدخل $\frac{4}{x+1}$ في f1 ، و $\frac{3}{2}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

2:Add Graphs ثم اكتب $\frac{4}{x+1}$

واضغط enter ، ثم اضغط المفاتيح: tab

واكتب $\frac{3}{2}$ واضغط enter



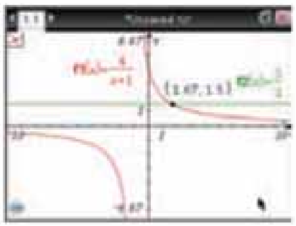
الخطوة 2 استعمال ميزة Intersection Point(s).

تمكنك ميزة Intersection Point(s) في قائمة Points & Lines من تقدير الزوج المرتب الذي يمثّل نقطة التقاطع.

اضغط على المفاتيح:

menu 7:Points & Lines 3:Intersection Point(s)

واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر فتظهر نقطة التقاطع (1.5 , 1.67)



أي أن الحل هو 1.67 .

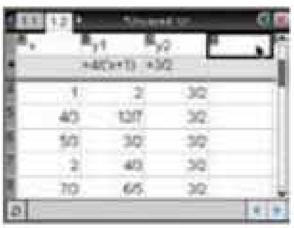
الخطوة 3 استعمال ميزة table

تحقق من صحة حلّك باستعمال ميزة table. اعمل جدولًا يبيّن قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{3}$ كل مرة، وذلك بالضغط على المفاتيح:

4:Add Lists & Spreadsheet ،

واكتب $Y_1 = \frac{4}{x+1}$ في العمود الثاني، $Y_2 = \frac{3}{2}$ في العمود الثالث.

يبيّن الجدول قيم x وقيم y المناظرة لها لكل تمثيل بياني. فعندما $x = \frac{5}{3}$ ، يكون للدالتين القيمة نفسها، وهي $\frac{3}{2}$ ، وهذا يعني أن حل المعادلة هو $\frac{5}{3} \approx 1.67$.

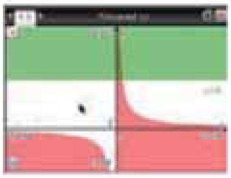


يمكنك استعمال الخطوات الآتية لحل متباينات نسبية مستعملاً الحاسبة البيانية TI-nspire.

نشاط 2 متباينة نسبية

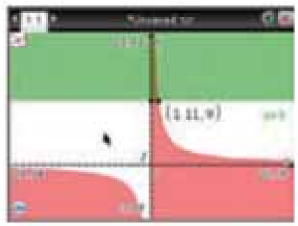
حل المتباينة $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} > 9$.

الخطوة 1 مثل المتباينتين



أعد كتابة المسألة على صورة نظام من متباينتين، المتباينة الأولى هي $y < \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ ، والثانية $y > 9$ بالضغط على المفاتيح: < ctrl 2:Add Graphs on ، واكتب $\frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ ثم اضغط enter فيظهر تظليل تحت التمثيل البياني. ولتمثيل المتباينة الثانية اضغط على المفاتيح > del tab واكتب 9 ، ثم اضغط enter ولإظهار التمثيل اضغط على المفاتيح 4:Zoom - Out 4:Window/Zoom menu واضغط على الشاشة الرئيسية مرتين تصغر ويظهر التظليل فوق التمثيل البياني.

الخطوة 2 استعمل ميزة Intersection Point(s)



اضغط على المفاتيح:

menu 7:Points & Lines 3:Intersection Point(s)

واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر، فتظهر نقطة التقاطع $(1.11, 9)$ ، كرّر ذلك مرّة أخرى، واضغط على محور y ، والتمثيل البياني لـ $y = 9$ ؛ لتتوصل إلى أن مجموعة الحل هي $\{x \mid 0 < x < 1.11\}$

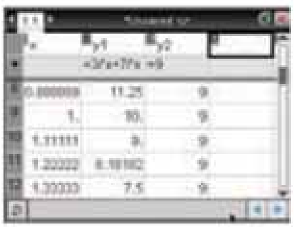
الخطوة 3 استعمل ميزة Table

تحقق من صحة حلك باستعمال ميزة Table . اعمل جدولاً يبيّن قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{9}$ كل مرة، وذلك

باضغط على المفاتيح:

on 4:Add Lists & Spreadsheet

واكتب $Y_1 = \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ في العمود الثاني، $Y_2 = 9$ في العمود الثالث.



تنقّل بالمؤشر خلال الجدول. ستلاحظ أن قيم x الأكبر من 0 والأقل من $\frac{10}{9} \approx 1.11$ ، يكون عندها Y1 > Y2.

وهذا يؤكد أن مجموعة حل المتباينة هي: $\{x \mid 0 < x < 1.11\}$

تمارين

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$

2) $\frac{1}{x-4} = \frac{2}{x-2}$

3) $\frac{4}{x} = \frac{6}{x^2}$

4) $\frac{1}{1-x} = 1 - \frac{x}{x-1}$

5) $\frac{1}{x+4} = \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{1}{1-x}$

6) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} > 5$

7) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$

8) $1 + \frac{5}{x-1} \le 0$

9) $2 + \frac{1}{x-1} \ge 0$

الفصل **5**

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العبارات النسبية والعمليات عليها (الدرسان 2-5 , 1-5)

- ضرب العبارات النسبية وقسمتها يشبه ضرب الكسور وقسمتها.
- لتبسيط كسر مركب بسّط البسط والمقام كل على حدة، ثم بسّط العبارة الناتجة.
- جمع العبارات النسبية وطرحها يشبه جمع الكسور وطرحها.

دوال المقلوب والدوال النسبية (الدرسان 4-5 , 3-5)

- دالة المقلوب هي دالة على الصورة $f(x)=\frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.
- الدالة النسبية هي دالة على الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$، و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.
- يوجد لبعض دوال المقلوب والدوال النسبية مستقيمات يقترب منها التمثيل البياني للدوال، تسمى خطوط التقارب.
- أصفار الدالة النسبية هي القيم التي تجعل $a(x) = 0$.

التغيُّر الطردي، والتغيُّر المشترك، والتغيُّر العكسي (الدرس 5-5)

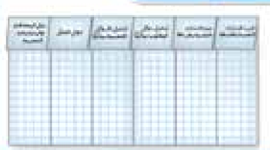
- التغيُّر الطردي: تتغيّر y طرديًا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.
- التغيُّر المشترك: تتغيّر y تغيرًا مشتركًا مع x و z ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.
- التغيُّر العكسي: تتغيّر y عكسيًا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $xy = k$ ، أو $y = \frac{k}{x}$ حيث $x \neq 0 , y \neq 0$.

حل المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 6-5)

- لحل المعادلات النسبية تخلص من المقامات بضرب طرفي المعادلة في LCM لها.
- يُستثنى من مجموعة حل المعادلة النسبية القيم التي تجعل أحد مقامات المعادلة صفرًا.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات:

العبارة النسبية ص 10	التغيُّر الطردي ص 38
الكسر المركب ص 13	ثابت التغيُّر ص 38
دالة المقلوب ص 24	التغيُّر المشترك ص 39
القطع الزائد ص 24	التغيُّر العكسي ص 40
خط التقارب ص 25	التغيُّر المركب ص 41
خط التقارب الرأسي ص 25	المعادلة النسبية ص 44
خط التقارب الأفقي ص 25	الوسط الموزون ص 45
الدالة النسبية ص 31	المتباينة النسبية ص 48
نقطة الانفصال ص 33	

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) ________ هو عبارة نسبية بسطها ومقامها أو أحدهما عبارة نسبية.

2) إذا تغيَّرت كميتان ________ فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا k.

3) يعبر عن ________ بمعادلة على الصورة $y = kx$.

4) تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر ________ .

5) التمثيل البياني للمعادلة $y = \frac{x}{x+2}$ له ________ عند $x = -2$.

6) يحدث ________ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

7) تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود ________ .

8) تظهر ________ على شكل فجوة في التمثيل البياني للدالة لأن الدالة غير معرّفة عندها.

9) يحدث ________ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

الفصل
5 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها ص 10-17

بسّط كل عبارة مما يأتي:

10) $\dfrac{-16xy}{27z} \cdot \dfrac{15z^3}{8x^2}$

11) $\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+x-12} \cdot \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

12) $\dfrac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \dfrac{x^2-5x-14}{x^2-6x-7}$

13) $\dfrac{x+y}{15x} \div \dfrac{x^2-y^2}{3x^2}$

14) $\dfrac{\frac{x^2+3x-18}{x+4}}{\frac{x^2+7x+6}{x+4}}$

15) **هندسة:** مثلث مساحته $(3x^2+9x-54)\text{cm}^2$، وارتفاعه $(x+6)\text{cm}$. أوجد طول قاعدته.

مثال 1

بسّط العبارة $\dfrac{4a}{3b} \cdot \dfrac{9b^4}{2a^2}$

$$\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot 3 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b}{3 \cdot b \cdot 2 \cdot a \cdot a}$$
$$= \frac{6b^3}{a}$$

مثال 2

بسّط العبارة $\dfrac{r^2+5r}{2r} \div \dfrac{r^2-25}{6r-12}$

$$\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12} = \frac{r^2+5r}{2r} \cdot \frac{6r-12}{r^2-25}$$
$$= \frac{r(r+5)}{2r} \cdot \frac{6(r-2)}{(r+5)(r-5)}$$
$$= \frac{3(r-2)}{r-5}$$

5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها ص 18-23

بسّط كل عبارة مما يأتي:

16) $\dfrac{9}{4ab} + \dfrac{5a}{6b^2}$

17) $\dfrac{3}{4x-8} - \dfrac{x-1}{x^2-4}$

18) $\dfrac{y}{2x} + \dfrac{4y}{3x^2} - \dfrac{5}{6xy^2}$

19) $\dfrac{2}{x^2-3x-10} - \dfrac{6}{x^2-8x+15}$

20) $\dfrac{3}{3x^2+2x-8} + \dfrac{4x}{2x^2+6x+4}$

21) $\dfrac{\frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{2x+3}}$

22) **هندسة:** أوجد محيط المستطيل المرسوم أدناه.

مثال 3

بسّط العبارة $\dfrac{3a}{a^2-4} - \dfrac{2}{a-2}$

$$\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$$ بتحليل المقام a^2-4

$$= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$ بتوحيد المقامين

$$= \frac{3a-2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$ بطرح البسطين

$$= \frac{3a-2a-4}{(a-2)(a+2)}$$ خاصية التوزيع

$$= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)}$$ بالتبسيط

5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا ص 29-24

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجال ومدى كل منها:

23) $f(x) = \frac{10}{x}$

24) $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$

25) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

26) $f(x) = \frac{6}{x-9}$

27) $f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$

28) $f(x) = -\frac{4}{x+4} - 8$

29) **أشجار:** يقوم طلاب الصف الأول الثانوي بزراعة 28 شجرة ضمن حملة للحفاظ على البيئة. ويعتمد عدد الأشجار التي يزرعها كل طالب على عدد طلاب الصف.

a) اكتب دالة تمثل هذا الموقف.

b) مثّل هذه الدالة بيانيًا.

مثال 4

مثّل الدالة $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداها.

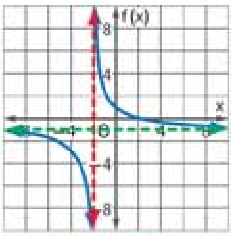
بما أن $a = 3$: إذن يتسع التمثيل البياني للدالة الأم رأسيًا.

ثم $h = -2$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى اليسار وحدتين.
وَ يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

وَ $k = -1$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى الأسفل بمقدار وحدة.
وَ يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$.

المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$



5-4 تمثيل الدوال النسبية بيانيًا ص 36-31

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

30) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x}$

31) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 6x + 8}$

32) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x - 24}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

33) $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$

34) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

35) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$

36) $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 5x + 6}$

37) **مبيعات:** يبيع علي اشتراكات في إحدى الصحف إلى سكان أحد الأحياء. فإذا باع 10 اشتراكات لأول 15 بيتًا زاره، ثم زار x بيتًا آخر وباع كلًّا منها اشتراكًا، فيمكن حساب نسبة مبيعاته إلى عدد البيوت التي زارها باستعمال الدالة $P(x) = \frac{10 + x}{15 + x}$.

a) مثّل هذه الدالة بيانيًا.

b) ما القيم المنطقية لكل من المجال والمدى في سياق المسألة؟

مثال 5

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

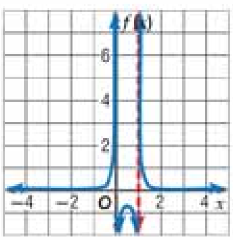
الدالة غير معرّفة عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$.

وبما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$، فإن $x = -3$ هي معادلة خط التقارب الرأسي وتوجد نقطة انفصال عند $x = 1$.

مثال 6

مثّل الدالة: $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًا.

الدالة غير معرفة عند $x = 0$،
و عند $x = 1$.
وبما أن الدالة في أبسط صورة،
فإن $x = 0$ ، و $x = 1$
خطا تقارب رأسيان للدالة.



ارسم الخطين والدالة بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه.

الفصل 5
دليل الدراسة والمراجعة

5-5 دوال التغيُّر ص 38-43

38) إذا كانت a تتغيّر طرديًّا مع b، وكانت $b = 18$ عندما $a = 27$ فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

39) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$ فأوجد قيمة y عندما $x = -5$.

40) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$، فأوجد قيمة y عندما $x = 81$.

41) إذا كانت y تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $x = 8$، و $z = 3$ عندما $y = 72$ فأوجد قيمة y عندما $x = -2$ و $z = -5$.

42) إذا كانت y تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y = 18$، عندما $x = 6$، و $z = 15$، فأوجد قيمة y عندما $x = 12$ و $z = 4$.

43) **مهن:** يتغيّر أجر أحد العمال طرديًّا مع عدد ساعات عمله، فإذا تقاضى 120 ريالًا مقابل 8 h عمل، كم ريالًا يتقاضى إذا عمل 5 h؟

مثال 7

إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$، فأوجد قيمة x عندما $y = 15$.

$\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ تناسب عكسي

$\frac{24}{15} = \frac{x_2}{-8}$ $x_1 = 24$ ، $y_1 = -8$ ، $y_2 = 15$

$24(-8) = 15(x_2)$ بالضرب التبادلي

$-192 = 15x_2$ بالتبسيط

$-12\frac{4}{5} = x_2$ بقسمة كلا الطرفين على 15

عندما تكون $y = 15$، فإن قيمة x هي $-12\frac{4}{5}$.

5-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية ص 44-50

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلّك:

44) $\frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$

45) $\frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$

46) $\frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$

47) $\frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3}$

48) $\frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$

49) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4}$

50) $\frac{1}{2x} = \frac{1}{3}$

51) **عمل:** يستطيع سعيد وحده زراعة إحدى الحدائق في 3 h، في حين يستطيع علي زراعتها في 4 h. كم ساعة يحتاجان إليها إذا زرعا الحديقة معًا؟

مثال 8

حُلّ المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$، وتحقق من صحة حلّك.

LCM للمقامات هو $x(x+2)$

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)(0)$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$3(x) + 1(x+2) = 0$$
$$3x + x + 2 = 0$$
$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

تحقق:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$\frac{3}{-\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{(-\frac{1}{2})} \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{3}{\frac{3}{2}} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2 - 2 = 0 \checkmark$$

اختبار الفصل

بسِّط كل عبارة مما يأتي:

1) $\frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2}$

2) $\frac{m^2-4}{3m^2} \cdot \frac{6m}{2-m}$

3) $\frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3}$

4) $\frac{\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15}}{\frac{x^2-1}{x^2-x-20}}$

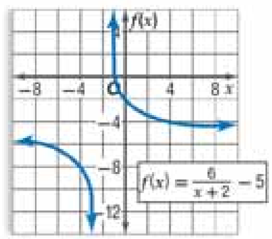
5) $\frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1}$

6) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2}$

7) $\frac{1}{y} + \frac{2}{7} - \frac{3}{2y^2}$

8) $\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$

9) حدد خطوط التقارب، والمجال والمدى للدالة الممثلة بيانيًا أدناه.



10) **اختيار من متعدد:** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3x+2}$؟

A $x=-2$

B $x=-1$

C $x=1$

D $x=2$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

11) $f(x)=-\frac{8}{x}-9$

12) $f(x)=\frac{2}{x+4}$

13) $f(x)=\frac{3}{x-1}+8$

14) $f(x)=\frac{5x}{x+1}$

15) $f(x)=\frac{x}{x-5}$

16) $f(x)=\frac{x^2+5x-6}{x-1}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

17) $f(x)=\frac{x+5}{x^2-2x-35}$.

18) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+3}$.

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

19) $\frac{-1}{x+4}=6-\frac{x}{x+4}$

20) $\frac{1}{3}=\frac{5}{m+3}+\frac{8}{21}$

21) $7+\frac{2}{x}<-\frac{5}{x}$

22) $r+\frac{6}{r}-5=0$

23) $\frac{6}{7}-\frac{3m}{2m-1}=\frac{11}{7}$

24) $\frac{r+2}{3r}=\frac{r+4}{r-2}-\frac{2}{3}$

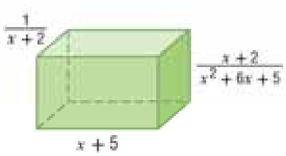
25) إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x، وكانت $y=18$ عندما $x=-\frac{1}{2}$، فأوجد قيمة x عندما $y=-10$.

26) إذا كانت m تتغير طرديًا مع n، و كانت $m=24$ عندما $n=-3$، فأوجد قيمة n عندما $m=30$.

27) إذا كانت r تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع s و t. وكانت $s=20$ عندما $r=140$، و $t=-5$، فأوجد قيمة s عندما $r=7$، و $t=2.5$.

28) **دراجات هوائية:** عندما يقود أحمد دراجته الهوائية فإن المسافة التي يقطعها تتناسب طرديًا مع الزمن. إذا قطع 50 mi في 2.5 h، فكم ساعة يحتاج إليها ليقطع 80 mi إذا استمر في السير بالمعدل نفسه؟

29) ما حجم المنشور متوازي المستطيلات في الشكل المجاور؟



اختبار تراكمي

للفصول 5 - 1

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

1) تتغيّر تكلفة استئجار غرفة في أحد الفنادق طرديًّا مع عدد أيام استئجارها كما هو موضح في الجدول الآتي:

عدد الأيام	التكلفة (بالريال)
1	150
2	300
3	450
4	600

أي المعادلات الآتية تمثل ذلك التغيُّر الطردي؟

A $y = x + 150$

B $y = 150x$

C $y = \frac{150}{x}$

D $y = 600x$

2) في أي اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x}$، للحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟

A إلى أعلى

B إلى أسفل

C إلى اليمين

D إلى اليسار

3) أي مما يأتي ليس خط تقارب للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$؟

A $y = 0$

B $x = -7$

C $x = 7$

D $y = 1$

4) ما أبسط صورة للكسر المركب $\dfrac{\frac{(x+3)^2}{x^2-16}}{\frac{x+3}{x+4}}$ ؟

A $\frac{x+3}{x+4}$

B $\frac{1}{x-4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

5) قيمة محددة المصفوفة $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$ تساوي:

A 77

B 45

C 13

D −77

6) ما حل المعادلة: $\frac{8}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3}$ ؟

A −13

B $\frac{7}{3}$

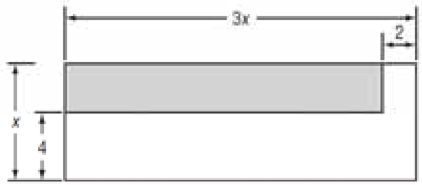
C 5

D 7

إجابة قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

7) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل أدناه على صورة كثيرة حدود في أبسط صورة.



8) إذا كانت y تتغيّر طرديًا مع x، وكانت $y = 12$ عندما $x = -3$، فأوجد قيمة y عندما $x = 16$.

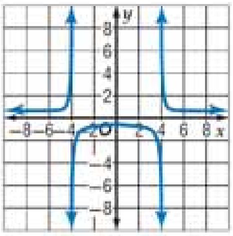
9) إذا كانت x تتغيّر طرديًا مع y وعكسيًا مع z، وكانت $z = 26$ عندما $x = 8$ و $y = 13$، فأوجد قيمة z عندما $x = 8$ و $y = -6$.

10) إذا كانت y تتغيّر عكسيًا مع x، وكانت $y = 4$ عندما $x = 12$، فأوجد قيمة y عندما $x = 5$.

إجابة طويلة

أجب عن كل مما يأتي موضحًا خطوات الحل :

11) استعمل التمثيل البياني للدالة النسبية المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:



a) أوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للتمثيل البياني.

b) اكتب قاعدة الدالة النسبية موضحًا خطوات الحل.

12) أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في كل مما يأتي:

a) $f(x) = x^2$
$g(x) = x - 5$

b) $f(x) = 6 - x^2$
$g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

13) ما المعدل الذي يجب أن يحصل عليه طالب سجل 18 ساعة في فصل دراسي، ليصبح معدله التراكمي 4.00، إذا كان معدله التراكمي خلال 100 ساعة درسها هو 3.95؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس ...	5-5	5-5	5-4	5-1	2-4	5-6	3-3	5-5	5-5	5-5	5-4	3-3, 3-4	5-6

الفصل
6

المتتابعات والمتسلسلات
Sequences and Series

فيما سبق:

درست تبسيط العبارات الجبرية، وإيجاد قيمها.

والآن:

- أستعمل المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- أجد مفكوك القوى باستعمال نظرية ذات الحدين.
- أبرهن جملًا رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.

لماذا؟

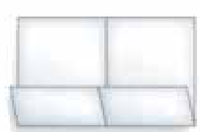
تظهر المتتابعات بأشكال شتى، وطرائق مدهشة، كما في بعض البذور والأزهار والفواكه والخضراوات.

المطويات منظم أفكار

المتتابعات والمتسلسلات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المتتابعات والمتسلسلات، مبتدئًا بورقة واحدة A4.

1. **اطوِ** الورقة من المنتصف كما في الشكل.

2. **أعد** الورقة إلى وضعها ثم اطوِ الجانب الأطول بمقدار 5 سنتمترات لعمل جيب كما في الشكل.



3. **ألصق** الطرفين لعمل الجيب.

4. **ضع** عنوانًا لكل جانب كما في الشكل، استعمل أوراقًا أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة.

التهيئة للفصل 6

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمتطلبات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

1) $-6 = 7x + 78$
2) $768 = 3x^4$
3) $23 - 5x = 8$
4) $2x^3 + 4 = -50$
5) **نباتات:** يريد أحمد أن يزرع 48 شتلة ورد في حديقته، بحيث يزرع في أحد جزأيها 12 شتلة، وفي الجزء الثاني يزرع كل أربع شتلات من الشتلات المتبقية في صف واحد. فما عدد الصفوف التي سيزرعها؟

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا:

6) $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$
7) $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$
8) $\left\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), \left(5, \frac{1}{3}\right)\right\}$
9) $\left\{(1, 1), (2, 2), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{11}{4}\right), \left(5, \frac{23}{8}\right)\right\}$
10) **حضانة:** تبلغ المصروفات الشهرية لإحدى دور الحضانة 14000 ريال، وتتقاضى الدار عن كل طفل 1000 ريال شهريًّا. والمعادلة $P(c) = 1000c - 14000$ تعبّر عن ربح الحضانة الشهري عندما تضم c طفلًا. فما ربح الحضانة الشهري عندما يكون فيها 30 طفلًا؟

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند قيم المتغيّرات المعطاة.

11) $\frac{a}{3}(b + c)$ إذا كان $a = 9, b = -2, c = -8$
12) $r + (n - 2)t$ إذا كان $r = 15, n = 5, t = -1$
13) $x \cdot y^{z+1}$ إذا كان $x = -2, y = \frac{1}{3}, z = 5$
14) $\frac{a(1 - bc)^2}{1 - b}$ إذا كان $a = -3, b = -4, c = 1$

مراجعة سريعة

مثال 1

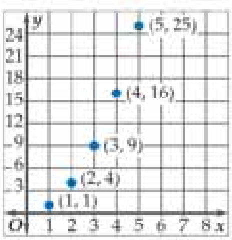
حُلّ المعادلة: $25 = 3x^3 + 400$

$-375 = 3x^3$	بطرح 400 من الطرفين
$-125 = x^3$	بقسمة الطرفين على 3
$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3}$	بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين
$-5 = x$	بالتبسيط

مثال 2

مثّل الدالة: $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$ بيانيًّا. ثم حدد كلا من المجال والمدى.

مجال الدالة هو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر المستقل (x). لذلك يكون مجال الدالة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. أمّا مدى الدالة فهي القيم الممكنة جميعها للمتغيّر التابع (y) إذن مدى الدالة هو المجموعة: $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.



مثال 3

إذا كانت $x = -2, y = -3$، فجد قيمة: $2 \cdot 3^{x+y}$

$2 \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 3^{-2+-3}$	بالتعويض
$= 2 \cdot 3^{-5}$	بالتبسيط
$= \frac{2}{3^5} = \frac{2}{243}$	تعريف القوّة السالبة

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

6-1

المتتابعات بوصفها دوالّ
Sequences as Functions

فيما سبق:

درست الدوال الخطية والأسية.

والآن:

- أربط المتتابعة الحسابية بدالة خطية.
- أربط المتتابعة الهندسية بدالة أسية.

المفردات:

المتتابعة
sequence

الحد
term

المتتابعة المنتهية
finite sequence

المتتابعة غير المنتهية
infinite sequence

المتتابعة الحسابية
arithmetic sequence

أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك)
common difference

المتتابعة الهندسية
geometric sequence

أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة)
common ratio

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

خلال أحد المهرجانات الكشفية، دخل المشاركون إلى الملعب في صفوف، بحيث كان عدد الأفراد في كل صف كما يأتي: مشارك واحد في الصف الأول، وثلاثة في الصف الثاني، وخمسة في الصف الثالث، وهكذا تستمر أعداد المشاركين على هذا النمط.

المتتابعات الحسابية: **المتتابعة** مجموعة من الأعداد مرتّبة في نمط محدّد أو ترتيب معين ويُسمّى كل عدد في المتتابعة **حدًّا**. ويمكن للمتتابعة أن تكون **منتهية** أي لها عدد محدّد من الحدود مثل: $-2, 0, 2, 4, 6$، أو **غير منتهية** حيث تستمر إلى ما لانهاية مثل $0, 1, 2, 3, \ldots$. ويُرمز للحد الأول في المتتابعة بالرمز a_1، وللحد الثاني بالرمز a_2، وهكذا.

مفهوم أساسي — المتتابعات كدوال

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المتتابعة دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية.

الرموز:

عناصر المجال:	$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n$	ترتيب الحد
عناصر المدى:	$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n$	حدود المتتابعة

أمثلة:

متتابعة منتهية	متتابعة غير منتهية
$3, 6, 9, 12, 15$	$3, 6, 9, 12, 15, \ldots$
المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$	المجال: مجموعة الأعداد الطبيعية جميعها
المدى: $\{3, 6, 9, 12, 15\}$	المدى: مجموعة المضاعفات الطبيعية للعدد 3

يُحدّد كل حد في **المتتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحد الذي يسبقه. وتُسمّى القيمة الثابتة **الفرق المشترك** أو **الأساس**. فالمتتابعة: $3, 6, 9, 12, 15$ هي متتابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقًا مشتركًا (ثابتًا) حيث يزيد كل حد على الحد الذي يسبقه بمقدار 3.

$$3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15$$

مثال 1 — تحديد المتتابعات الحسابية

بيِّن إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي حسابية أم لا:

a) $5, -6, -17, -28, \ldots$

$$5 \xrightarrow{-11} -6 \xrightarrow{-11} -17 \xrightarrow{-11} -28$$

الفرق الثابت هو -11

المتتابعة حسابية

b) $-4, 12, 28, 42, \ldots$

$$-4 \xrightarrow{+16} 12 \xrightarrow{+16} 28 \xrightarrow{+14} 42$$

الفرق غير ثابت

المتتابعة ليست حسابية

تحقق من فهمك

1A) $7, 12, 16, 20, \ldots$

1B) $-6, 3, 12, 21, \ldots$

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الحسابية لإيجاد حدودها.

مثال 2 تمثيل المتتابعة الحسابية بيانيًا

في المتتابعة الحسابية: ... ,10 ,14 ,18

a) أوجد الحدود الأربعة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: لحساب أساس المتتابعة اطرح أي حد من حدود المتتابعة من الحد اللاحق له مباشرة. فأساس المتتابعة المعطاة هو $-4 = 14 - 10$. ويُمثّل هذا العدد الفرق المشترك بين حدود المتتابعة.

الخطوة 2: لإيجاد الحد التالي، أضف -4 للحد الأخير المعطى.

وهكذا أضف -4 لكل حد من الحدود التالية.

$$10 \xrightarrow{+(-4)} 6 \xrightarrow{+(-4)} 2 \xrightarrow{+(-4)} -2 \xrightarrow{+(-4)} -6$$

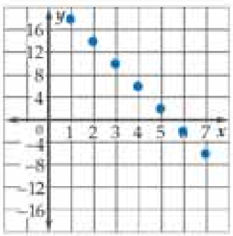
إذن، الحدود الأربعة التالية للمتتابعة هي: $6, 2, -2, -6$

b) مثّل الحدود السبعة الأولى من المتتابعة بيانيًا.

مجال المتتابعة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$

ومدى المتتابعة هو المجموعة: $\{18, 14, 10, 6, 2, -2, -6, ...\}$

ولذلك تُمثّل هذه الحدود من المتتابعة بيانيًا بالشكل المجاور.



تحقق من فهمك

2) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية ... ,4 ,11 ,18 ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًا.

لاحظ أن النقاط التي تُمثّل حدود المتتابعة الحسابية تقع على مستقيم واحد، ممّا يعني أن المتتابعة الحسابية هي دالة خطية متغيّرها المستقل هو رقم الحد n ومتغيّرها التابع هو الحد a_n والميل هو أساسها الذي هو الفرق الثابت.

مثال 3 من واقع الحياة إيجاد حدود المتتابعة

الفرق الكشفية: **بالعودة إلى بداية الدرس. أوجد عدد المشاركين الموجودين في الصف الرابع عشر.**

افهم بما أن الفرق الثابت بين كل حد والحد السابق له هو 2 فإن أساس المتتابعة 2

خطّط اكتب قاعدة المتتابعة باستعمال صيغة الميل والنقطة.

افرض أن $(x_1, y_1) = (3, 5)$ ، $m = 2$. ثم حُلّ المعادلة عندما $x = 14$

حُلّ

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$(y - 5) = 2(x - 3)$	$m = 2$, $(x_1, y_1) = (3, 5)$
$y - 5 = 2x - 6$	بالضرب
$y = 2x - 1$	بجمع 5 لكل من طرفي المعادلة
$y = 2(14) - 1$	بتعويض 14 مكان x
$y = 28 - 1 = 27$	بالتبسيط

إذن، عدد المشاركين في الصف الرابع عشر هو 27 مشاركًا.

تحقق يمكن إيجاد حدود المتتابعة بإضافة 2 لكل صف، بدءًا من الصف الأول حتى تصل إلى الصف الرابع عشر.

تحقق من فهمك

3) **نقود:** يتقاضى علي لقاء عمله أجرة مقدارها 100 ريال يوميًا، ويحصل على زيادة على أجرته اليومية مقدارها 5 ريالات كل 3 شهور. فكم تصبح أجرته اليومية بعد مرور 3 سنوات؟

الربط مع الحياة

في أغلب الاحتفالات العسكرية، يقوم المنظمون بعمل ترتيبات خاصة عند الافتتاح، ومنها على سبيل المثال دخول الفرق بطرق مختلفة.

المتتابعة الهندسية: **المتتابعة الهندسية** نوع آخر من المتتابعات، يمكن الحصول على أي حد من حدودها بضرب الحد السابق له في عدد ثابت يسمّى **أساس المتتابعة الهندسية** أو النسبة المشتركة للمتتابعة.

لاحظ أن المتتابعة $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$ متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، أي أن كل حد في المتتابعة هو 4 أمثال الحد السابق له مباشرة.

$$\frac{1}{16} \xrightarrow{\times 4} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 4} 16$$

مثال 4 تحديد المتتابعة الهندسية

بيِّن إذا كانت كل من المتتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

a) $-2, 6, -18, 54, \ldots$

أوجد النسبة بين كل حدين متتاليين.

$$\frac{6}{-2} = -3 \quad , \quad \frac{-18}{6} = -3 \quad , \quad \frac{54}{-18} = -3$$

بما أن النسب متساوية، فإن المتتابعة هندسية.

b) $8, 16, 24, 32, \ldots$

$$\frac{16}{8} = 2 \quad , \quad \frac{24}{16} = 1.5 \quad , \quad \frac{32}{24} = 1.\overline{3}$$

بما أن النسب غير متساوية؛ فإن المتتابعة ليست هندسية.

تنبيه!

النسب إذا وجدت نسبة أحد الحدود إلى الحد السابق له فجد بقية النسب بالطريقة نفسها.

تحقق من فهمك

4A) $-8, 2, -0.5, 0.125, \ldots$ **4B)** $1, 3, 7, 15, \ldots$

يمكن استعمال أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) لإيجاد حدود أخرى من حدود المتتابعة.

مثال 5 تمثيل المتتابعة الهندسية بيانيًا

المتتابعة: ... ,2 ,8 ,32 متتابعة هندسية.

a) أوجد الحدود الثلاثة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة أو النسبة المشتركة: $\frac{1}{4}$ أو $\frac{2}{8}$

الخطوة 2: لإيجاد الحد التالي، أضرب الحد السابق في العدد $\frac{1}{4}$

وهكذا بضرب كل حد في العدد $\frac{1}{4}$ نحصل على الحدود الآتية.

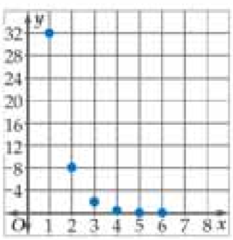
$$2 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{8} \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{32}$$

إذن الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$

b) مثِّل الحدود الستة الأولى في المتتابعة بيانيًا.

المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

المدى: $\left\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots\right\}$



إرشادات للدراسة

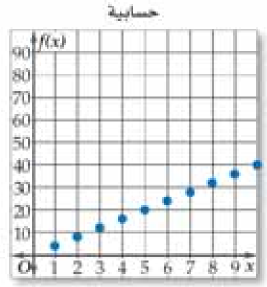
المقصود بالفرق بين كل حدين متتاليين أي: الحد − سابقه ابتداءً من الحد الثاني وكذلك النسبة بين كل حدين متتالين تعني الحد ÷ سابقه ابتداءً من الحد الثاني

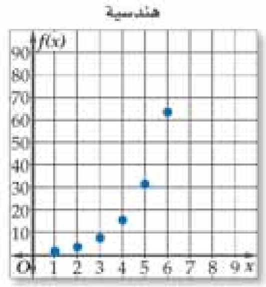
تحقق من فهمك

5) أوجد الحدين التاليين في المتتابعة: ... ,63 ,21 ,7، ثم مثِّل الحدود الخمسة الأولى بيانيًا.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **الدالة الأسية**
>
> هي الدالة التي على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 0 , b \neq 1$

تفحص الشكل في المثال 5. تلاحظ أن التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية أسّي وليس خطيًّا كما في المتتابعة الحسابية، وبالتالي فإنه يمكن تمثيل المتتابعة الهندسية بالدالة $f(x) = r^x$، حيث r أساس المتتابعة الهندسية و $r > 0$ و $r \neq 1$





x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	8	16	32	64

يمكن استعمال خصائص المتتابعات الحسابية والمتتابعات الهندسية في تصنيف المتتابعات.

مثال 6 تصنيف المتتابعات

حدّد نوع المتتابعة إذا كانت حسابية، أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

a) $16 , 24 , 36 , 54 , \ldots$

أوجد الفرق بين كل حدين متتاليين.

$54 - 36 = 18 \qquad 36 - 24 = 12$ ✗

أوجد النسبة بين كل حدين متتاليين.

$\frac{54}{36} = \frac{3}{2} \qquad \frac{36}{24} = \frac{3}{2} \qquad \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ ✓

بما أن النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة؛ فإن المتتابعة هندسية.

b) $1 , 4 , 9 , 16 , \ldots$

أوجد الفرق بين كل حدين متتاليين.

$16 - 9 = 7 \qquad 9 - 4 = 5$ ✗

أوجد النسبة بين كل حدين متتاليين.

$\frac{16}{9} = 1.\overline{7} \qquad \frac{9}{4} = 2.25$ ✗

بما أن الفرق بين كل حدين متتاليين ليس عددًا ثابتًا، وكذلك النسبة بين كل حدين متتاليين ليست ثابتة أيضًا؛ فإن المتتابعة ليست حسابية ولا هندسية.

c) $23 , 17 , 11 , 5 , \ldots$

أوجد الفرق بين كل حدين متتاليين.

$5 - 11 = -6 \qquad 11 - 17 = -6 \qquad 17 - 23 = -6$ ✓

بما أن الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت؛ فإن المتتابعة حسابية.

تحقق من فهمك

حدّد نوع المتتابعة إذا كانت حسابية، أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

6A) $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$ **6B)** $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \ldots$ **6C)** $-4, 4, 5, -5, \ldots$

تأكـد

مثال 1 بيّن إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا: اكتب نعم أو لا:

1) $8, -2, -12, -22, \ldots$
2) $-19, -12, -5, 2, 9$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثّل المتتابعة بيانيًّا:

3) $6, 18, 30, \ldots$
4) $15, 6, -3, \ldots$

مثال 3
5) **توفير:** يوفر سعيد 250 ريالًا شهريًّا، فإذا كان معه 1000 ريال في البداية، فأوجد ما يلي:
a) المبلغ الذي يصبح معه بعد مرور 8 أشهر.
b) الوقت الذي يحتاجه ليصبح معه 7250 ريالًا إذا استمر يوّفر بالطريقة ذاتها.

مثال 4 حدّد إذا كانت المتتابعة في كل مما يأتي متتابعة هندسية أم لا. اكتب نعم أو لا:

6) $4, 12, 36, 108, \ldots$
7) $7, 14, 21, 28, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل المتتابعة بيانيًّا:

8) $250, 50, 10, 2, \ldots$
9) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$

مثال 6 حدّد نوع المتتابعة إذا كانت حسابية أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك.

10) $5, 1, 7, 3, 9, \ldots$
11) $200, -100, 50, -25, \ldots$
12) $12, 16, 20, 24, \ldots$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بيّن إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا، اكتب نعم أو لا:

13) $-9, -3, 0, 3, 9$
14) $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثّل المتتابعة بيانيًّا:

15) $-5, -11, -17, -23, \ldots$
16) $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \ldots$
17) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots$

مثال 3
18) **تنظيم قاعات:** يوجد 28 مقعدًا في الصف الأول في إحدى قاعات المحاضرات، وعدد المقاعد في كل صف تالٍ يزيد بمقدار مقعدين عن الصف السابق. فإذا كان في هذه القاعة 24 صفًّا من المقاعد فكم مقعدًا يوجد في الصف الأخير؟

19) **تمارين قوة:** يقوم علي ببعض التمارين الرياضية لاستعادة لياقته البدنية. ويُخطّط لاستعمال أحد الأجهزة الرياضية لمدة 5 دقائق في اليوم الأول، ثم زيادة مدة الاستعمال بمعدل دقيقة وثلاثين ثانية يوميًّا.
a) ما مدة استعمال علي للجهاز في اليوم الثامن عشر؟
b) ما أول يوم سيستعمل فيه الجهاز مدة ساعة أو أكثر؟
c) هل يُعدّ استمرار علي في هذا النمط إلى ما لا نهاية منطقيًّا؟ لماذا؟

مثال 4 بيّن إذا كانت المتتابعة في كل مما يأتي متتابعة هندسية أم لا، اكتب نعم أو لا.

20) $21, 14, 7, \ldots$
21) $-27, 18, -12, \ldots$
22) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل المتتابعة بيانيًّا:

23) $81, 108, 144, \ldots$
24) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$
25) $1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$

مثال 6 حدد نوع المتتابعة إذا كانت حسابية، أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

26) $3, 12, 27, 48, \ldots$
27) $1, -2, -5, -8, \ldots$

29) $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \ldots$

28) $12, 36, 108, 324, \ldots$

31) $6, 9, 14, 21, \ldots$

30) $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$

32) **قراءة:** أرادت ندى إتمام قراءة كتاب يضم 800 صفحة خلال العطلة الصيفية. فإذا قرأت 112 صفحة حتى بداية العطلة، وأرادت إنهاء قراءة الكتاب في 8 أيام، فما عدد الصفحات التي عليها قراءتها يوميًّا إذا كانت تقرأ العدد نفسه من الصفحات يوميًّا؟

33) **نقص القيمة:** تنقص قيمة سيارة ماجد بمعدل 15% سنويًّا. إذا كانت القيمة الحالية لسيارته 50000 ريال، فكم تكون قيمتها بعد 5 سنوات مقربًا الجواب إلى أقرب ريال؟

34) **طي الأوراق:** عند طي ورقة على نفسها، فإن سُمكها يتضاعف. فإذا كان سُمك ورقة 0.1 mm وأمكن طيها 37 مرة فكم يصبح سمكها؟

الربط مع الحياة

تنقص قيمة السيارة عادة بمعدل 15% إلى 20% سنويًا، وذلك اعتمادًا على نوع السيارة وعلى السائق.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) **تبرير:** وضح لماذا لا تُعدّ المتتابعة: 8, 10, 13, 17, 22 حسابية.

36) **تحدٍّ:** إذا كان مجموع ثلاثة حدود متتالية في متتابعة حسابية يساوي 6 وحاصل ضربها يساوي 42− . فما هي هذه الحدود؟

37) **مسألة مفتوحة:** أوجد ثلاث متتابعات تبدأ كل منها كما يأتي ... ,3 ,9 . بحيث تكون إحداها حسابية والثانية هندسية والثالثة لا حسابية ولا هندسية.

38) **تبرير:** إذا كان أساس متتابعة هندسية يساوي r حيث $|r| < 1$، فماذا يحدث لحدود المتتابعة عندما تزداد قيمة n؟ ما الذي يحدث للحدود إذا كانت $|r| \geq 1$؟

39) **اكتب:** صف ما يحدث لحدود متتابعة هندسية عندما يصبح أساسها مثلي قيمته، وما يحدث للحدود عندما يصبح الأساس نصف قيمته؟ وضّح إجابتك.

تدريب على اختبار

40) **إجابة قصيرة:** صالة مستطيلة الشكل بعداها 13 مترًا، 11 مترًا. إذا أردنا وضع سجادة تُغطّي الصالة كاملة، فأوجد سعر السجادة إذا كان سعر المتر المربع الواحد منها 60 ريالًا.

41) ما الحد التالي في المتتابعة الهندسية $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$ ؟

A $\frac{11}{8}$

B $\frac{27}{16}$

C $\frac{9}{4}$

D $\frac{81}{32}$

مراجعة تراكمية

42) حل المعادلة: $\frac{3}{x-3} + 9 = 10$ (الدرس 5-5)

أوجد معادلة المستقيم في كل مما يأتي: مهارة سابقة (الدرس 5-3)

43) المار بالنقطة (6, 4)، وميله 0.5 .

44) المار بالنقطتين $(1, 3)$, $(8, -\frac{1}{2})$.

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية
Arithmetic Sequences and Series

فيما سبق:

درست تمييز المتتابعة الحسابية.

والآن:

- أستعمل المتتابعات الحسابية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية.

المفردات:

الأوساط الحسابية
arithmetic means

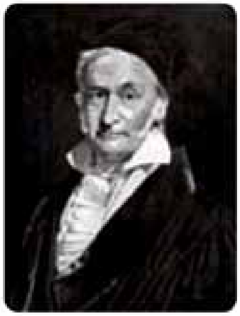
المتسلسلات
series

المتسلسلات الحسابية
arithmetic series

المجموع الجزئي
partial sum

رمز المجموع
sigma notation

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

في القرن الثامن عشر، طلب معلم للرياضيات من طلابه في المرحلة الابتدائية أن يجدوا مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. قام أحد الطلاب واسمه كارل جاوس (Karl Gauss) بإعطاء الإجابة الصحيحة خلال ثوان مما أثار استغراب المعلم. وقد أصبح هذا الطالب "كارل جاوس" أحد أفضل علماء الرياضيات على مر العصور.

لقد حل جاوس هذا السؤال باستعمال المتسلسلات الحسابية.

المتتابعات الحسابية لقد استعملت صيغة النقطة والميل في الدرس 1 – 6 لإيجاد قيمة حد معيّن في متتابعة حسابية. ويمكنك إيجاد معادلة تستطيع من خلالها إيجاد أي حد من حدود متتابعة حسابية باستعمال الأسلوب نفسه.

ففي المتتابعة الحسابية $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ التي أساسها d يكون:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل والنقطة}$$

$$(a_n - a_1) = d(n - 1) \quad (x, y) = (n, a_n),\ (x_1, y_1) = (1, a_1),\ m = d$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad \text{بجمع } a_1 \text{ للطرفين}$$

ويمكنك استعمال هذه الصيغة لإيجاد قيمة أي حد من حدود المتتابعة الحسابية، وذلك بمعرفة الحد الأول والأساس.

مفهوم أساسي — **الحد النوني في المتتابعة الحسابية**

أضف إلى مطويتك

تستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحد النوني في متتابعة حسابية حدها الأول a_1 وأساسها d حيث n عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستبرهن هذه الصيغة في السؤال 58

مثال 1 — **إيجاد حد معين في متتابعة حسابية**

أوجد الحد الثاني عشر في المتتابعة: $9, 16, 23, 30, \dots$

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة.

$$30 - 23 = 7 \qquad 23 - 16 = 7 \qquad 16 - 9 = 7$$

إذن $d = 7$

الخطوة 2: أوجد الحد الثاني عشر.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{الحد النوني في المتتابعة الحسابية}$$

$$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7) \quad a_1 = 9,\ d = 7,\ n = 12$$

$$= 9 + 77 = 86 \quad \text{بالتبسيط}$$

تحقق من فهمك

أوجد الحد المطلوب في كل من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

(1A a_n علمًا بأن: $a_1 = -4,\ d = 6,\ n = 9$

(1B a_{20} علمًا بأن: $a_1 = 15,\ d = -8$

إذا أعطيت مجموعة من الحدود في متتابعة حسابية، فيمكنك كتابة صيغة للحد النوني في هذه المتتابعة.

مثال 2 كتابة صيغة للحد النوني في المتتابعات

اكتب صيغة للحد النوني للمتتابعة الحسابية في كل ممّا يأتي:

a) $5, -13, -31, \ldots$

$d = -13 - 5 = -18$ والحد الأول 5

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني في المتتابعة الحسابية
$a_n = 5 + (n-1)(-18)$	$d = -18$ و $a_1 = 5$
$a_n = -18n + 23$	باستعمال خاصية التوزيع، ثم بالتبسيط

b) $a_5 = 19,\ d = 6$

أولًا، أوجد قيمة a_1

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني في المتتابعة الحسابية
$19 = a_1 + (5-1)(6)$	$a_5 = 19,\ n = 5,\ d = 6$
$-5 = a_1$	بالضرب، ثم بطرح 24 من الطرفين

ثم اكتب المعادلة

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني في المتتابعة
$a_n = -5 + (n-1)(6)$	$d = 6$ و $a_1 = -5$
$a_n = 6n - 11$	باستعمال خاصية التوزيع، ثم بالتبسيط

تحقق من فهمك

2A) $12, 3, -6, \ldots$

2B) $a_6 = 12,\ d = 8$

إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحل

تحقق من صحة الحل، باستعمال صيغة الحد النوني التي أوجدتها لحساب الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعة.

في بعض الأحيان يُعطى في المسألة حدان غير متتاليين في متتابعة حسابية. وتُسمّى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدين **أوساطًا حسابية**، ويمكن استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة بين حدين في متتابعة.

قراءة الرياضيات

الوسط الحسابي هو معدل عددين أو أكثر.

الأوساط الحسابية هي الحدود الواقعة بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: $\ldots, 22, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -8$

الخطوة 1: بما أنه يوجد 4 حدود بين الحد الأول والحد الأخير؛ فإن عدد حدود المتتابعة هو $4 + 2 = 6$، إذن $n = 6$.

الخطوة 2: أوجد قيمة d

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$	الحد النوني في المتتابعة الحسابية
$22 = -8 + (6-1)\,d$	$a_1 = -8,\ a_6 = 22,\ n = 6$
$30 = 5d$	خاصية التوزيع
$6 = d$	بقسمة الطرفين على 5

الخطوة 3: استعمل d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة المطلوبة.

$$-8 \xrightarrow{+6} -2 \xrightarrow{+6} 4 \xrightarrow{+6} 10 \xrightarrow{+6} 16 \xrightarrow{+6} 22$$

إذن، الأوساط الحسابية هي $-2, 4, 10, 16$

تحقق من فهمك

3) أوجد خمسة أوساط حسابية بين العددين $36, -18$

المتسلسلات الحسابية يمكن الحصول على **المتسلسلة** بوضع إشارة الجمع بين حدود المتتابعة. لذا، فالمتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتابعة حسابية. ويُسمّى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة **المجموع الجزئي** ويُرمز له بالرمز S_n.

مفهوم أساسي — المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًا (S_n) هو:
بالصيغة العامة	a_1, a_n	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$
بالصيغة البديلة	a_1, d	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

في بعض الأحيان، لا بد من إيجاد إحدى القيم a_1, a_n, n، قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وفي هذه الحالة استعمل صيغة الحد النوني.

مثال 4 استعمال صيغ المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $12 + 19 + 26 + \ldots + 180$

الخطوة 1: $a_1 = 12,\ a_n = 180,\ d = 19 - 12 = 7$

يجب إيجاد قيمة n أولاً كي نجد المجموع.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ الحد النوني في المتتابعة الحسابية

$180 = 12 + (n-1)(7)$ $a_n = 180, a_1 = 12, d = 7$

$168 = 7n - 7$ باستعمال خاصية التوزيع، ثم بالتبسيط

$25 = n$ بحل المعادلة

الخطوة 2: استعمل إحدى الصيغتين لحساب S_n

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ صيغة المجموع

$S_{25} = \frac{25}{2}[2(12) + (25-1)(7)]$ $n = 25, a_1 = 12, d = 7$

$S_{25} = 12.5(192) = 2400$ بالتبسيط

تحقق من فهمك أوجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي.

(4A $2 + 4 + 6 \cdots + 100$

(4B $n = 16, a_n = 240, d = 8$

تنبيه!

أساس المتتابعة الحسابية

لا تخطئ في تحديد إشارة أساس المتتابعة الحسابية، وتحقق دائمًا من أن معادلة الحد النوني تعطي حدود المتتابعة جميعها.

يمكن استعمال صيغة المجموع في إيجاد حدود المتسلسلة.

مثال 5 إيجاد الحدود الثلاثة الأولى

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $a_1 = 7, a_n = 79, S_n = 430$

الخطوة 1: أوجد قيمة n

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ صيغة المجموع

$430 = n\left(\frac{7 + 79}{2}\right)$ $S_n = 430, a_1 = 7, a_n = 79$

$430 = n(43)$ بالتبسيط

$10 = n$ بقسمة طرفي المعادلة على 43

الخطوة 2: أوجد قيمة d

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني للمتتابعة الحسابية
$79 = 7 + (10-1)d$	$a_n = 79, a_1 = 7, n = 10$
$72 = 9d$	بطرح 7 من طرفي المعادلة
$8 = d$	بقسمة طرفي المعادلة على 9

الخطوة 3: استعمل d لحساب كل من a_2 ، a_3

$a_2 = 7 + 8 = 15 \quad a_3 = 15 + 8 = 23$

إذن، الحدود الثلاثة الأولى هي 23 ، 15 ، 7

تحقق من فهمك

أوجد الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعات الحسابية الآتية:

5A) $S_n = 120, n = 8, a_n = 36$ **5B)** $a_1 = -24, a_n = 288, S_n = 5280$

يمكن كتابة مجموع حدود المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال **رمز المجموع**.

مفهوم أساسي: رمز المجموع

أضف إلى مطويتك

الرموز: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$

- n: آخر قيمة لـ k
- $k=1$: أول قيمة لـ k
- $f(k)$: صيغة حدود المتسلسلة

مثال:

$$\sum_{k=1}^{12}(4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \ldots + [4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \ldots + 50$$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع: يقرأ الرمز $\sum$ "سيجما" وهو اسم لأحد الحروف اليونانية الكبيرة.

مثال 6 على اختبار

أوجد $\sum_{k=4}^{18}(6k-1)$

A 846 **B** 910 **C** 975 **D** 1008

يوجد 15 حدًا $(n = 15)$ ، $18 - 4 + 1$.

$a_1 = 6(4) - 1 = 23 \quad a_n = 6(18) - 1 = 107$

أوجد المجموع

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$	صيغة المجموع
$S_{15} = 15\left(\frac{23 + 107}{2}\right)$	$n = 15, a_1 = 23, a_n = 107$
$S_{15} = 15(65) = 975$	إذن، رمز الإجابة الصحيحة هو C

إرشادات للاختبار

حل مسألة أبسط في بعض الأحيان من الضروري تجزيء المسألة إلى أجزاء ، وحل كل جزء على حدة، ثم جمع الحلول.

تحقق من فهمك

6) أوجد $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$

A 972 **B** 1053 **C** 1281 **D** 1701

تأكـد

مثال 1 أوجد قيمة الحد المطلوب في كل من المتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

(1 a_n علماً بأن: $a_1 = 14, d = 9, n = 11$

(2 a_{18} في المتابعة: $12, 25, 38, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحد النوني لكل من المتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

(3 $13, 19, 25, \ldots$

(4 $a_5 = -12, d = -4$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتابعتين الآتيتين:

(5 $6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 42$

(6 $-4, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

مثال 4 أوجد مجموع حدود كل متسلسلة فيما يأتي:

(7 أول 50 عددًا طبيعيًّا

(8 $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$

(9 $a_1 = 12, a_n = 188, d = 4$

(10 $a_n = 145, d = 5, n = 21$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كل من المتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

(11 $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$

(12 $n = 18, a_n = 112, S_n = 1098$

مثال 6 **(13** **اختيار من متعدد :** أوجد $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$.

A 45

B 78

C 342

D 410

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة الحد المطلوب في كل من المتابعات الحسابية الآتية:

(14 a_n علماً بأن: $a_1 = -18, d = 12, n = 16$

(15 a_n علمًا بأن: $a_1 = -12, n = 66, d = 4$

(16 a_{15} في المتابعة $-5, -12, -19, \ldots$

(17 a_{24} في المتابعة $8.25, 8.5, 8.75, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحد النوني في كل متابعة حسابية فيما يأتي:

(18 $24, 35, 46, \ldots$

(19 $a_5 = 1.5, d = 4.5$

(20 $9, 2, -5, \ldots$

(21 $a_6 = 22, d = 9$

(22 $a_8 = -8, \mathrm{d} = -2$

(23 $-12, -17, -22, \ldots$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتابعات الآتية:

(24 $24, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -1$

(25 $-6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 49$

(26 $-28, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 7$

(27 $84, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 39$

مثال 4 أوجد مجموع كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

28) أول 100 عدد زوجي في مجموعة الأعداد الطبيعية

29) أول 200 عدد فردي في مجموعة الأعداد الطبيعية

30) $-18 + (-15) + (-12) + \ldots + 66$

31) $-24 + (-18) + (-12) + \ldots + 72$

32) $a_1 = -16, d = 6, n = 24$

33) $n = 19, a_n = 154, d = 8$

34) **مسابقات ثقافية:** تبدأ جائزة مسابقة ثقافية بمبلغ 150 ريالًا، ويُضاف مبلغ 50 ريالًا إلى الجائزة كل شهر، إذا استمرت المسابقة لمدة أحد عشر شهرًا فكم يكون مجموع قيم الجوائز؟

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كل من المتتابعات الحسابية الآتية:

35) $a_1 = 48, a_n = 180, S_n = 1368$

36) $a_1 = 3, a_n = 66, S_n = 759$

37) $n = 28, a_n = 228, S_n = 2982$

38) $a_1 = -33, n = 36, S_n = 6372$

مثال 6 أوجد مجموع كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

39) $\sum_{k=1}^{16}(4k - 2)$

40) $\sum_{k=4}^{13}(4k + 1)$

41) $\sum_{k=5}^{16}(2k + 6)$

42) $\sum_{k=0}^{12}(-3k + 2)$

43) **قرض حسن:** اقترض علي مبلغًا من المال من أحد أصدقائه، واتفقا على أن يقوم بتسديده مقسّطًا كما يأتي: القسط الأول 50 ريالًا، وكل قسط تالٍ يزيد على القسط السابق بمقدار 25 ريالًا. فإذا علمت أن عدد الأقساط 12، فما قيمة القرض؟

الربط مع الحياة

يجب على الإنسان أن يكتب عقدًا بينه وبين من يقرضه المال، عملًا بقوله تعالى في سورة البقرة ﴿ يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا تَدَايَنتُم بِدَيْنٍ إِلَىٰٓ أَجَلٍ مُّسَمًّى فَٱكْتُبُوهُ ... ﴿٢٨٢﴾ ﴾

استعمل المعلومات المعطاة في كل من الأسئلة الآتية؛ لكتابة معادلة تُمثّل الحد النوني لكل متتابعة حسابية:

44) الحد رقم 100 في المتتابعة 245، وأساس المتتابعة 13 .

45) الحد الحادي عشر في المتتابعة 78، وأساس المتتابعة 9− .

46) الحد الخامس والعشرون في المتتابعة 121، والحد الثمانون 506 .

47) **تنظيم:** تُصفّ الطاولات المستطيلة الشكل في قاعات الاحتفالات متجاورة لتُشكّل طاولة كبيرة. يُبيّن الشكل أدناه عدد الأشخاص الذين يمكن توزيعهم على التشكيلين الأول والثاني من الطاولات.

a) ارسم شكلاً يُبيّن عدد الأشخاص على الطاولات في كل من الحدود الثلاثة التالية (بإضافة طاولة كل مرة).

b) اكتب معادلة تُمثّل الحد النوني في هذا النمط.

c) هل من الممكن ترتيب الطاولات بهذه الطريقة، بحيث يستطيع 100 شخص الجلوس؟ وضّح إجابتك.

48) **جاذبية:** عندما يسقط جسم سقوطًا حرًّا تحت تأثير الجاذبية الأرضية ومع إهمال مقاومة الرياح، فإنه يقطع مسافة 16 قدمًا في الثانية الأولى، و48 قدمًا إضافية في الثانية الثانية، و80 قدمًا إضافية في الثانية الثالثة، وهكذا. ما المسافة التي يقطعها هذا الجسم في 10 ثوانٍ؟

49) **دخل سنوي:** إذا كان الدخل السنوي لمؤسسة 92000 ريال، ويزيد سنويًّا بمقدار 16000 ريال، فبعد كم سنة يصبح دخلها 380000 ريال؟

50) **رياضة:** خلال استعداده لأحد سباقات الجري لمسافات طويلة، يُخطِّط فيصل للتدرّب على الجري لمسافة 3 أميال يوميًّا في الأسبوع الأول، ومن ثم يقوم بزيادة المسافة بمقداره نصف ميل أسبوعيًّا.

a) اكتب معادلة للحد النوني لهذه المتتابعة.

b) إذا استمر فيصل بالتدرّب على هذا النمط، ففي أي أسبوع يصل إلى قطع مسافة 10 أميال يوميًّا؟

c) هل يُعدّ الاستمرار على هذا النمط إلى ما لا نهاية منطقيًّا؟ وضّح إجابتك.

الربط مع الحياة

رياضة الجري تفيد في إنقاص الوزن، وتقوية المفاصل والعضلات، وتحسين عمل القلب والأوعية الدموية، والتخلص من الإرهاق والتوتر، ورفع مستوى اللياقة البدنية والصحة العامة

51) **تمثيلات متعددة:** معتبرًا $\sum_{k=1}^{n}(2k+2)$ أجب عما يأتي:

a) **جدوليًّا:** اعمل جدولًا للمجاميع الجزئية للمتسلسلة حيث $1 \leq k \leq 10$.

b) **بيانيًّا:** مثّل بيانيًّا المجاميع الجزئية التي أوجدتها في الفرع **a** (المجموع الجزئي k,) .

c) **بيانيًّا:** مثّل الدالة $f(x) = x^2 + 3x$ بيانيًّا على المستوى البياني نفسه.

d) **لفظيًّا:** ماذا تلاحظ حول التمثيلين البيانيين؟

e) **تحليليًّا:** ماذا تستنتج حول العلاقة بين التمثيل البياني للدالة التربيعية والتمثيل البياني لمجموع المتسلسلة الحسابية؟

f) **جبريًّا:** أوجد المتسلسلة الحسابية المرتبطة بالدالة $g(x) = x^2 + 8x$

أوجد قيمة x في كل ممّا يأتي:

52) $\sum_{k=3}^{x}(6k-5) = 928$

53) $\sum_{k=5}^{x}(8k+2) = 1032$

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **تبرير:** إذا كان a هو الحد الثالث في متتابعة حسابية، b هو الحد الخامس، c هو الحد الحادي عشر، فعبّر عن c بدلالة a, b

55) **تحدٍّ:** يوجد ثلاثة أوساط حسابية بين العددين a, b في متتابعة حسابية. إذا كان الوسط الحسابي للأوساط الثلاثة 16 فجد الوسط الحسابي للعددين a, b؟

56) **مسألة مفتوحة:** اكتب متسلسلة حسابية فيها 8 حدود ومجموعها 324 .

57) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتتابعات الحسابية والمتسلسلات الحسابية.

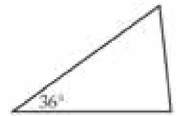
58) **برهان:** اشتق صيغة الحد النوني للمتتابعة الحسابية.

59) **برهان:** اشتقّ قاعدة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية، بحيث لا تحتوي على a_1.

60) **برهان:** اشتقّ الصيغة البديلة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية؛ باستعمال الصيغة العامة للمجموع.

تدريب على اختبار

61) تُشكّل قياسات زوايا المثلث أدناه متتابعة حسابية. إذا كان قياس الزاوية الصغرى °36، فما قياس الزاوية الكبرى؟



A $75°$

B $84°$

C $90°$

D $97°$

62) العبارة $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ تكافئ:

A $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$

B $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$

C $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$

D $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

مراجعة تراكمية

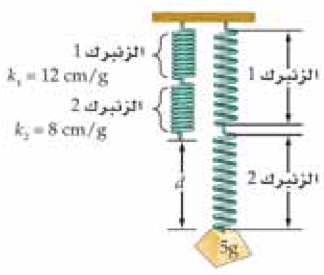
حدّد إذا كانت كل من المتتابعات الآتية حسابية أم لا. أجب "بنعم" أو "لا": (الدرس 6-1)

63) $-6, 4, 14, 24, \ldots$

64) $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$

65) $10, 8, 5, 1, \ldots$

66) **فيزياء:** ترتبط المسافة التي يستطيل فيها الزنبرك بالكتلة المعلّقة فيه. ويعبر عن هذه العلاقة بالقاعدة $d = km$، حيث d المسافة، m الكتلة، k ثابت الزنبرك. وعند وصل زنبركين لهما الثابتان k_1, k_2 على التوالي، فإن ثابت الزنبرك k الناتج يحسب باستعمال المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. (الدرس 6-5)



a) إذا وُصل زنبركان على التوالي، وكان ثابت الزنبرك الأول $12\,cm/g$، وثابت الزنبرك الثاني $8\,cm/g$، فجد ثابت الزنبرك الناتج.

b) إذا عُلّقت كتلة مقدارها 5 جرامات (كما في الشكل) فما مقدار استطالة الزنبركين؟

أوجد قيمة كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

67) $2 \cdot 3^6$

68) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

69) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية
Geometric Sequences and Series

فيما سبق:
درست تمييز المتتابعة الهندسية.

والآن:
- أستعمل المتتابعات الهندسية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

المفردات:
الأوساط الهندسية
geometric means
المتسلسلات الهندسية
geometric series

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

خلال بحثه في الإنترنت وجد "أحمد" موضوعًا عن العلاج بالأعشاب، فقام بإرساله إلى خمسة من أصدقائه باستعمال البريد الإلكتروني، ومن ثم قام كل واحد منهم بإرسال الموضوع إلى خمسة أصدقاء آخرين، وهكذا قام كل من استلم البريد بإرساله إلى خمسة أصدقاء جدد. إذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة الثامنة؟

المتتابعات الهندسية: كما هو الحال في المتتابعات الحسابية، فإن للمتتابعات الهندسية صيغة للحد النوني تُستعمل لإيجاد قيمة أي حد من حدودها.

مفهوم أساسي — **الحد النوني في المتتابعة الهندسية** — أضف إلى مطويتك

يُعطى الحد النوني في المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a_1 وأساسها r بالصيغة الآتية:

$a_n = a_1 r^{n-1}$ حيث n عدد طبيعي

ستبرهن صحة هذه الصيغة في السؤال رقم (39)

مثال 1 من واقع الحياة — **إيجاد الحد النوني**

في المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، ما عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسلة في المرحلة الثامنة؟

افهم تريد إيجاد عدد الرسائل في المرحلة الثامنة، حيث أرسل أحمد خمس رسائل في المرحلة الأولى، وفي المرحلة الثانية أرسل كل شخص من الخمسة الرسالة إلى خمسة أشخاص آخرين، وهكذا (مع مراعاة أن كل شخص استلم رسالة واحدة).

خطط يُشكّل عدد الرسائل المرسلة في كل مرحلة متتابعة هندسية أساسها $r = 5$، لذا استعمل صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية.

حُل

$a_n = a_1 r^{n-1}$ الحد النوني في المتتابعة الهندسية

$a_8 = 5(5)^{8-1}$ $\quad a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$a_8 = 5(78125) = 390625$ $\quad 5^7 = 78125$

تحقق اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة، بالضرب في أساس المتتابعة.

5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, 390625

وبهذا، فإن عدد الرسائل المرسلة في المرحلة الثامنة هو 390625 رسالة.

تحقق من فهمك

1) **بريد إلكتروني:** أرسل سعيد رسالة إلى أربعة من أصدقائه باستعمال البريد الإلكتروني، ثم قام كل منهم بدوره بإرسالها إلى أربعة أصدقاء آخرين، وهكذا كانَ كل واحد يستلم الرسالة يبعثها إلى أربعة أصدقاء جدد. إذا استمر هذا النمط، فما عدد الأشخاص الذين سيستلمون الرسالة في المرحلة التاسعة (مع مراعاة أن كل شخص استلم رسالة واحدة)؟

إذا علمت بعض حدود المتتابعة الهندسية فيمكن إيجاد معادلة الحد النوني لها.

مثال 2 إيجاد معادلة الحد النوني

اكتب معادلة الحدّ النوني لكل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

a) $0.5, 2, 8, 32, \ldots$

الحد الأول 0.5، والأساس r يُستخرج كما يأتي: $r = \frac{8}{2} = 4$

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد النوني في المتتابعة الهندسية
$a_n = 0.5(4)^{n-1}$	$a_1 = 0.5, r = 4$

b) $a_4 = 5, r = 6$

الخطوة 1: إيجاد a_1

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد النوني في المتتابعة الهندسية
$5 = a_1(6^{4-1})$	$a_n = 5, r = 6, n = 4$
$\frac{5}{216} = a_1$	إيجاد قيمة 6^3 ثم القسمة على 216

الخطوة 2: كتابة المعادلة

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد النوني في المتتابعة الهندسية
$a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1}$	$a_1 = \frac{5}{216}, r = 6$

تحقق من فهمك

2A) $-0.25, 2, -16, 128, \ldots$ **2B)** $a_3 = 16, r = 4$

وكما في الأوساط الحسابية فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين في متتابعة هندسية، ويمكن استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2, 1250

الخطوة 1: بما أنه يوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحد الأول والحد الأخير، فإن عدد حدود المتتابعة هو $3 + 2 = 5$، ولذلك يكون $n = 5$

الخطوة 2: أوجد قيمة r

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد النوني في المتتابعة الهندسية
$1250 = 2r^{5-1}$	$a_n = 1250, a_1 = 2, n = 5$
$\pm 5 = r$	بقسمة الطرفين على 2، ثم إيجاد الجذر الرابع

الخطوة 3: استعمل r لإيجاد الأوساط الهندسية الثلاثة:

$$2 \xrightarrow{\times -5} -10 \xrightarrow{\times -5} 50 \xrightarrow{\times -5} -250 \xrightarrow{\times -5} 1250$$

أو

$$2 \xrightarrow{\times 5} 10 \xrightarrow{\times 5} 50 \xrightarrow{\times 5} 250 \xrightarrow{\times 5} 1250$$

إذن، الأوساط الهندسية هي: $-10, 50, -250$ أو $10, 50, 250$

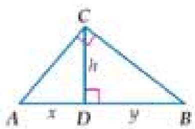
تحقق من فهمك

3) أوجد أربعة أوساط هندسية بين العددين 0.5, 512

قراءة الرياضيات

الأوساط الهندسية

يمكن تمثيل الأوساط الهندسية هندسيًا كما في الشكل أدناه حيث تُمثل h الوسط الهندسي بين x, y



المتسلسلات الهندسية: **المتسلسلة الهندسية** هي مجموع حدود المتتابعة الهندسية. ويرمز لمجموع أول n حدًا في المتسلسلة بالرمز S_n. ويمكن إيجاده باستعمال أي من الصيغتين الآتيتين:

مفهوم أساسي — المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًا من المتسلسلة S_n
بالصيغة العامة	a_1, n	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}, r \neq 1$
بالصيغة البديلة	a_1, a_n	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

مثال 4 من واقع الحياة — إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

بريد إلكتروني: **بالعودة إلى المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، إذا استمر النمط، فما مجموع رسائل البريد الإلكتروني المرسلة حتى نهاية المرحلة الثامنة؟**

أُرسلت خمس رسائل الكترونية في المرحلة الأولى، ولدينا 8 مراحل من الرسائل.

إذن $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{5 - 5 \cdot 5^8}{1-5}$ $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$S_8 = 488280$ بالتبسيط

إذن، مجموع الرسائل المرسلة حتى 8 مراحل هو : 488280 .

تحقق من فهمك أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين:

(4A $a_1 = 2, n = 10, r = 3$

(4B $a_1 = 2000, a_n = 125, r = \frac{1}{2}$

وكما في المتسلسلات الحسابية، فإنه يمكن استعمال رمز المجموع للتعبير عن المتسلسلات الهندسية.

تنبيه!

رمز المجموع

لاحظ في المثال 5 أنه طُلب إيجاد المجموع من الحد الثالث إلى الحد العاشر.

مثال 5 — المجموع باستعمال رمز المجموع

أوجد $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$

أوجد قيمة كل من a_1, r, n، ولإيجاد الحد الأول عوض العدد 3 مكان k، ويستخرج كما يأتي:

$a_1 = 4 \cdot 2^{3-1} = 16$، وأساس الدالة الأسية هو r، حيث $r = 2$.

وعدد الحدود هو : $10 - 3 + 1 = 8$ إذن $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{16 - 16(2)^8}{1-2}$ $a_1 = 16, r = 2, n = 8$

$= 4080$ باستعمال الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الآتيتين:

(5A $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

(5B $\sum_{k=2}^{9} \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1}$

يمكن استعمال صيغة مجموع حدود المتسلسلة الهندسية لإيجاد قيمة حد معين من حدود المتسلسلة.

مثال 6 إيجاد الحد الأول في المتسلسلة الهندسية

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = 13116,\ n = 7,\ r = 3$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$ صيغة المجموع

$$13116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3}$$ $S_n = 13116,\ r = 3,\ n = 7$

$$13116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$13116 = \frac{-2186 a_1}{-2}$$ بالطرح

$$13116 = 1093 a_1$$ بالتبسيط

$$12 = a_1$$ بقسمة الطرفين على 1093

تحقق من فهمك

6) أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = -26240,\ n = 8,\ r = -3$

تأكـد

مثال 1

1) أرسل هاني موضوعًا عن طريقة الدراسة الجيدة إلى ثلاثة من أصدقائه باستعمال البريد الإلكتروني. ومن ثم قام كل واحد منهم بإرسال الموضوع إلى ثلاثة أصدقاء آخرين، وهكذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط. فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة السابعة (مع مراعاة أن كل شخص استلم رسالة واحدة)؟

مثال 2 اكتب معادلة الحد النوني في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

2) $2, 4, 8, \ldots$

3) $-4, 16, -64, \ldots$

4) $a_2 = 4,\ r = 3$

مثال 3 أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كل من المتتابعتين الآتيتين:

5) 0.25, _?_, _?_, _?_, 64

6) 0.20, _?_, _?_, _?_, 125

مثال 4

7) بالعودة إلى السؤال رقم (1) من فقرة تأكد. ما مجموع رسائل البريد الإلكتروني المرسلة حتى المرحلة السابعة؟

مثال 5 أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الآتيتين:

8) $\sum_{k=1}^{6} 3(4)^{k-1}$

9) $\sum_{k=1}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

مثال 6 أوجد a_1 في كل من المتسلسلتين الآتيتين:

10) $S_n = 85\frac{5}{16},\ r = 4,\ n = 6$

11) $S_n = 1020,\ a_n = 4,\ r = \frac{1}{2}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1

12) **طقس:** نتيجة للأمطار الغزيرة، ارتفع منسوب المياه في بركة في اليوم الأول 3 cm ، فإذا كانت الزيادة في كل يوم ضعف الزيادة في اليوم السابق لمنسوب المياه في كلٍّ من الأيام الأربعة التالية، فكم سنتمترًا ارتفع منسوب المياه في البركة بعد خمسة أيام؟

أوجد a_n لكل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

13) $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$

14) $a_1 = -4, r = -2, n = 8$

مثال 2

اكتب معادلة الحد النوني في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

15) $-3, 6, -12, \ldots$

16) $-1, 1, -1, \ldots$

17) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

18) $a_3 = 28, r = 2$

19) $a_4 = -8, r = 0.5$

20) $a_6 = 0.5, r = 6$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

21) $810, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 10$

22) $\frac{7}{2}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \frac{56}{81}$

23) أوجد وسطين هندسيين بين العددين -2 , 16

مثال 4

24) **معالجة المياه:** يقوم نظام معين لفلترة وتنقية المياه بإزالة 70% من الشوائب أثناء مرور عينة مياه خلاله. فإذا مرّت عينة المياه في النظام أربع مرات. فما النسبة المئوية للشوائب التي سيقوم النظام بإزالتها من العينة؟

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

25) $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$

26) $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$

27) $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$

مثال 5

أوجد مجموع كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

28) $\sum_{k=1}^{7} 4(-3)^{k-1}$

29) $\sum_{k=1}^{8} (-3)(-2)^{k-1}$

30) $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$

مثال 6

أوجد قيمة a_1 في كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

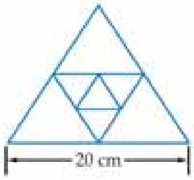
31) $S_n = -2912, r = 3, n = 6$

32) $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$

33) **علوم:** ارتفع منطاد مملوء بغاز بعد دقيقة واحدة من إطلاقه، مسافة 100 ft. وكان ارتفاعه بعد كل دقيقة إضافية يزيد بمقدار 50% على ارتفاعه في الدقيقة السابقة. أوجد ارتفاع المنطاد بعد 5 دقائق.

الربط مع الحياة

يستعمل البندول البسيط في الساعات البندولية، ويهتز اهتزازات منتظمة تقريبًا.



34) **هندسة :** في الشكل المجاور، طول ضلع المثلث الخارجي المتطابق الأضلاع يساوي ضعف طول ضلع المثلث الداخلي الذي تنصف رؤوسه أضلاع هذا المثلث. إذا استمر هذا النمط نحو الداخل، فما مجموع أطوال محيطات المثلثات الثمانية الأولى في النمط؟

35) **بندول :** يقطع بندول مسافة 30 cm في الذبذبة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الذبذبة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول في 30 ذبذبة.

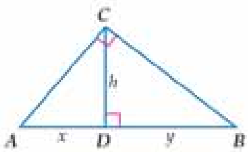
مسائل مهارات التفكير العليا

36) **برهان :** اشتقّ الصيغة البديلة للمجموع الجزئي في متسلسلة هندسية.

37) **برهان :** اشتقّ صيغة للمجموع الجزئي لا تتضمّن a_1

38) **تبرير :** وضّح التغيير الذي يجب أن تجريه على $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1}$ للحصول على المتسلسلة نفسها إذا غيّرت $k = 1$ إلى $k = 0$. ووضّح إجابتك.

39) **برهان :** اشتق صيغة الحد النوني للمتابعة الهندسية.



40) **تحدٍّ :** استعمل حقيقة أن h هي الوسط الهندسي بين x, y في الشكل المجاور في إيجاد قيمة h^4 بدلالة x, y

41) **مسألة مفتوحة :** اكتب متسلسلة هندسية فيها 6 حدود، ومجموعها 252 .

42) **اكتب :** وضّح كيف يمكنك تحديد إذا كانت المتسلسلة هندسية، أم حسابية، أم لا حسابية و لا هندسية، أم كليهما.

تدريب على اختبار

43) إذا كان الحد الأول في متسلسلة هندسية 5، وأساسها 2، ومجموعها 1275، فما عدد حدودها؟

A 5 **C** 7

B 6 **D** 8

44) **إجابة قصيرة** عند أحمد مبلغ من المال، يصرف نصفه في الشهر الأول ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا. إذا كان المبلغ الباقي بعد 4 أشهر هو 2000 ريال، فما المبلغ الأصلي؟

مراجعة تراكمية

45) **نقود :** اشترى عبدالعزيز جهاز تلفاز ودفع 400 ريال مقدمًا، على أن يدفع الباقي على أقساط شهرية لمدة سنة ونصف. فإذا كانت قيمة القسط الواحد 200 ريال، فما المبلغ الذي سيدفعه ثمنًا للجهاز؟ (الدرس 6-2)

حدّد إذا كانت كل من المتابعات الآتية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك، ووضّح إجابتك: (الدرس 6-1)

46) $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \ldots$

47) $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \ldots$

48) $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \ldots$

49) إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z، فأوجد قيمة y عندما $x = 9, z = -5$، علمًا بأن $y = -90$ عندما $z = 15$ ، $x = -6$. (الدرس 5-5)

50) أوجد قيمة المقدار $\frac{a-c}{a+c}$ إذا علمت أن $a = -2, c = -12$. (مهارة سابقة)

اختبار منتصف الفصل

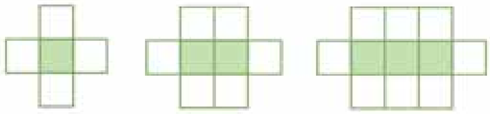
الدروس 1-6 إلى 3-6

حدِّد نوع المتتابعة إذا كانت حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك في كل مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

1) $5, -3, -12, -22, -33, \ldots$

2) $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5}, \ldots$

3) **هندسة:** الأشكال أدناه تُمثِّل نمطًا من المربعات المظللة والمربعات غير المظلّلة.



a) اكتب معادلة تُمثِّل عدد المربعات غير المظللة (الحد النوني) في هذا النمط.

b) هل يمكن الحصول على 84 مربعًا (غير مظلَّل) بالضبط في هذا النمط؟.

أوجد الحد التاسع في كل من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

4) $a_1 = 10, d = -5$

5) $a_1 = -8, d = 4$

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

6) $-15 + (-11) + (-7) + \cdots + 53$

7) $a_1 = -12, d = 8, n = 22$

8) ما مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$ ؟

9) **اختيار من متعدد:** ما مجموع أول 50 عددًا فرديًا في الأعداد الطبيعية؟

A 625

B 2500

C 2499

D 2401

أوجد الحد المطلوب في كل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$

11) $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$

12) **اختيار من متعدد:** ما الأوساط الهندسية في المتتابعة أدناه؟

$0.5, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, 2048$

A $512.375, 1024.25, 1536.125$

B $683, 1365.5, 2048$ أو $-683, 1365.5, -2048$

C $2, 8, 32$ أو $-2, 8, -32$

D $4, 32, 256$ أو $-4, 32, -256$

13) **دخل:** يعمل فريد في شركة بناء لمدة 4 أشهر في السنة. فإذا كان راتبه في البداية 5200 ريال في الشهر، وتزيد الشركة راتبه بمعدل 5% شهريًّا. فما المبلغ الذي سيحصل عليه في هذه الأشهر الأربعة؟

أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين:

14) $\sum_{k=1}^{8} 3 \cdot 2^{k-1}$

15) $\sum_{k=1}^{9} 4 \cdot (-1)^{k-1}$

6-4 المتسلسلات الهندسية غير المنتهية
Infinite Geometric Series

فيما سبق:

درست إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

والآن:

- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية.
- أكتب الكسر الدوري على صورة كسر اعتيادي.

المفردات:

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية
infinite geometric series

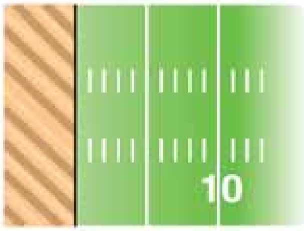
المتسلسلة المتقاربة
convergent series

المتسلسلة المتباعدة
divergent series

مالانهاية
infinity

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



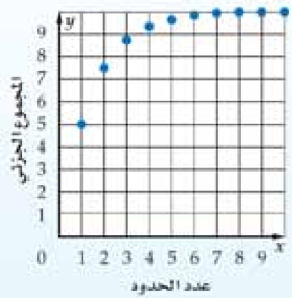
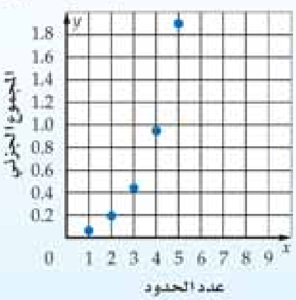
إذا وضعت كرة على بعد 10 أمتار من حائط، وبعد ذلك قمت بنقل الكرة باتجاه الحائط على عدة مراحل، بحيث تبلغ المسافة التي تنقل إليها الكرة نصف المسافة المتبقية بعد كل مرحلة، فهل تصل الكرة إلى الحائط؟ ما عدد المراحل التي تنقل فيها الكرة؟ يمكن الإجابة عن مثل هذه الأسئلة، بدراسة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية: **المتسلسلة الهندسية غير المنتهية** هي التي لها عدد لا نهائي من الحدود، وإذا كان مجموعها عددًا حقيقيًّا؛ فإن المتسلسلة تكون **متقاربة**؛ لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقي، أما إذا لم يكن للمتسلسلة مجموع، فإنها تُسمّى **متسلسلة متباعدة**.

أوجدت في الدرس السابق مجموع أول n حدًّا من متسلسلة هندسية لا نهائية، ويمكنك أيضًا إيجاد مجموع كل حدودها. ففي فقرة "لماذا؟" أعلاه تجد أن مجموع المسافات التي تقطعها الكرة تعطى بالمتسلسلة غير المنتهية $5 + 2.5 + 1.25 + \dots$، وكلما زاد عدد حدودها فإن مجموعها يقترب من 10 أمتار (وهو المجموع الفعلي لها). وبالتالي يمكن اعتبار أن الكرة تصل إلى الحائط عندما يزداد عدد حدودها إلى مالا نهاية. والشكل أدناه يظهر التمثيل البياني للمجموع S_n، حيث $1 \le n \le 10$

مفهوم أساسي: المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة

أضف إلى مطويتك

المتسلسلات المتقاربة	المتسلسلات المتباعدة
التعبير اللفظي: يقترب المجموع من عدد حقيقي. **إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس):** $\lvert r \rvert < 1$ **مثال:** $5 + 2.5 + 1.25 + \dots$	**التعبير اللفظي:** لا يقترب المجموع من عدد حقيقي. **إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس):** $\lvert r \rvert \ge 1$ **مثال:** $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots$
	

مثال 1 المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة:

حدّد أي المتسلسلتين الآتيتين متقاربة، وأيهما متباعدة:

a) $54 + 36 + 24 + \dots$

أوجد قيمة r

$r = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$، وبما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن المتسلسلة متقاربة.

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة
تذكّر أن $|r| < 1$ تعني أن $-1 < r < 1$

b) $8 + 12 + 18 + \ldots$

$r = \frac{12}{8} = 1.5$ ، وبما أن $1.5 > 1$، فإن المتسلسلة متباعدة.

تحقق من فهمك

1A) $2 + 3 + 4.5 + \ldots$

1B) $100 + 50 + 25 + \ldots$

إذا كانت $|r| < 1$ ، فإن قيمة r^n تقترب من الصفر كلما زادت قيمة n ، ولذلك فإن المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية اللانهائية تقترب من: $\frac{a_1 - a_1(0)}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r}$

مفهوم أساسي: مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

أضف إلى مطويتك

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية يُرمز له بالرمز S حيث $|r| < 1$

ويعطى بالصيغة $S = \frac{a_1}{1 - r}$

وإذا كان $|r| \geq 1$ فلا يوجد للمتسلسلة مجموع.

وعندما تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية متباعدة، ($|r| \geq 1$) فإنه لا يوجد مجموع لحدود المتسلسلة لأن قيمة r^n تزداد بلا حدود مع زيادة n .

والجدول المجاور يوضح المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية المتباعدة $4 + 16 + 64 + \ldots$ ، حيث كلما زادت قيمة n، فإن S_n تزداد بسرعة كبيرة جدًا.

n	S_n
5	1364
10	1398100
15	1431655764

مثال 2 مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين، إن وجد:

a) $\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \ldots$

الخطوة 1: أوجد قيمة r للتأكد من وجود المجموع من عدمه.

$r = \frac{6}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ بقسمة الحد على الحد السابق له مباشرة

بما أن $\frac{3}{5} < 1$ ، فإن للمتسلسلة مجموع.

الخطوة 2: استعمل المعادلة لإيجاد المجموع.

$S = \frac{a_1}{1 - r}$ صيغة المجموع

$= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{5}}$ $a_1 = \frac{2}{3}, r = \frac{3}{5}$

$= \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{5}{3}$ بالتبسيط

b) $6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \ldots$

$r = \frac{9}{6} = 1.5$، وبما أن $1.5 > 1$ ، فإن المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع.

إرشادات للدراسة

التقارب والتباعد
تتقارب المتسلسلة الهندسية اللانهائية عندما تكون القيمة المطلقة لأي حد فيها أقل من القيمة المطلقة للحد السابق له. وتكون المتسلسلة الحسابية اللانهائية متباعدة دائمًا.

تحقق من فهمك

2A) $4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots$

2B) $16 + 20 + 25 + \ldots$

يمكن استعمال رمز المجموع لتمثيل المتسلسلات الهندسية غير المنتهية، وهي التي تستمر حدودها إلى **ما لانهاية**؛ أي أنها تستمر دون توقف، ويُستعمل الرمز ∞ فوق رمز المجموع للدلالة على ذلك.

مثال 3 رمز المجموع والمتسلسلة اللانهائية

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{18}{1-\frac{4}{5}}$ $a_1 = 18, r = \frac{4}{5}$ ، ثم بالتبسيط

$= \frac{18}{\frac{1}{5}} = 90$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

3) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

الكسور الدورية: الكسر العشري الدوري هو مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية. فعلى سبيل المثال $0.\overline{45} = 0.454545... = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + ...$. ويمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل هذا الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

مثال 4 تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي

اكتب $0.\overline{63}$ على صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1: باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية

$$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + ... = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + ...$$

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}$ $a_1 = \frac{63}{100}, r = \frac{1}{100}$

$= \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ بالتبسيط

الطريقة 2: باستعمال الخواص الجبرية

$x = 0.\overline{63}$ افرض $x = 0.\overline{63}$

$x = 0.636363...$ بالكتابة على صورة كسر عشري دوري

$100x = 63.636363...$ بضرب كلا الطرفين في 100

$99x = 63$ بطرح x من $100x$ و $0.\overline{63}$ من $63.\overline{63}$

$x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ بقسمة الطرفين على 99

تحقق من فهمك

4) اكتب $0.\overline{21}$ على صورة كسر اعتيادي.

إرشادات لحل المسألة

اختيار الأسلوب الأفضل للحساب
في كثير من الأحيان يمكن حل المسألة بأكثر من طريقة، ولذلك استعمل الطريقة التي تفضلها.

إرشادات للدراسة

الكسور الدورية
الكسر العشري الدوري هو عدد نسبي، ويمكن كتابته على صورة كسر اعتيادي.

تأكـد

مثال 1 حدّد أي المتسلسلتين الآتيتين متقاربة، وأيهما متباعدة:

(1 $16 - 8 + 4 - \dots$

(2 $1 + 1 + 1 + \dots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

(3 $440 + 220 + 110 + \dots$

(4 $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \dots$

مثال 3 أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

(5 $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$

(6 $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1}$

مثال 4 اكتب كلًّا من الكسرين العشريين الدوريين الآتيين على صورة كسر اعتيادي:

(7 $0.\overline{35}$

(8 $0.\overline{642}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدّد أي المتسلسلات الآتية متقاربة، وأيها متباعدة:

(9 $21 + 63 + 189 + \dots$

(10 $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \dots$

(11 $0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots$

(12 $0.008 + 0.08 + 0.8 + \dots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الآتية (إن وجد):

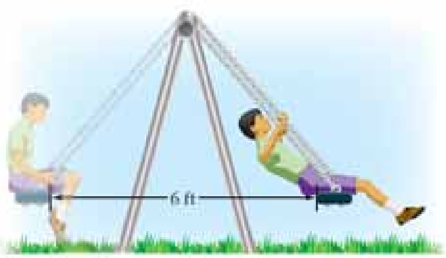
(13 $18 + 21.6 + 25.92 + \dots$

(14 $-3 - 4.2 - 5.88 - \dots$

(15 $\frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \dots$

(16 $32 + 40 + 50 + \dots$

(17 **أراجيح** إذا ترك سعيد نفسه عند نقطة البداية ليتأرجح دون دفع منه، كما في الشكل، وقد بدأت المسافة تتناقص بمقدار 10% في كل تأرجح، فجد المسافة الكلية التي يكون سعيد قد قطعها عندما تتوقف الأرجوحة تمامًا.



مثال 3 أوجد قيمة كل ممّا يأتي (إن وجدت):

(18 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$

(19 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$

(20 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

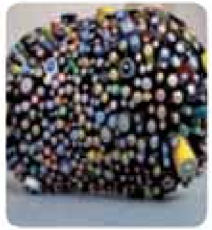
مثال 4 اكتب كلًّا من الكسور العشرية الدورية الآتية، على صورة كسر اعتيادي:

(21 $0.3\overline{21}$

(22 $4.\overline{96}$

(23 $0.12\overline{14}$

24) **بطاريات قابلة للشحن** أعلنت إحدى شركات صناعة البطاريات القابلة للشحن، عن بطارية تشحن بفاعلية نسبتها 99.9% من الفاعلية السابقة بعد كل مرة يتم فيها شحن البطارية. إذا كانت شحنتها في البداية تكفي للعمل 8 ساعات، فما أكبر عدد من الساعات يمكن أن تُستعمل فيه البطارية؟



الربط مع الحياة

استُعملت البطاريات في العالم منذ أكثر من 100 عام وهي مطلوبة الآن أكثر من أي وقت مضى، ولذلك فإن أكثر من 3 بلايين بطارية تتلف في كل عام. ويمكن استعمال بطارية واحدة من البطاريات القابلة للشحن بدلًا من 100 بطارية عادية.

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الآتية (إن وجد):

25) $\frac{15}{4}+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\dots$

26) $-\frac{16}{9}+\frac{4}{3}-1+\dots$

27) $\frac{21}{16}+\frac{7}{4}+\frac{7}{3}+\dots$

28) **تمثيلات متعددة** ستحتاج في هذه المسألة إلى بطاقة مربعة الشكل طول ضلعها لا يقل عن 8 بوصات.

a) **حسيًا:** افترض أن مساحة البطاقة تُمثّل وحدة مربعة. قُصّ البطاقة إلى نصفين، خذ أحدهما واعتبره الحد الأول، ثم قص النصف الآخر إلى نصفين واعتبر أحدها الحد الثاني. استمر في هذه العملية، واكتب المتسلسلة غير المنتهية، التي تعبر عن الأجزاء لديك.

b) **عدديًا:** إذا أمكن تقسيم البطاقة بهذه الطريقة إلى مالانهاية، فما مجموع المتسلسلة التي أوجدتها في الفرع **a**.

c) ما العلاقة بين مجموع المتسلسلة ومساحة البطاقة الأصلية؟

29) **فيزياء:** في تجربة فيزيائية دُحرجت كرة من الفولاذ على مسار أفقي، وبعد ذلك تركت لتتدحرج تلقائيًا، فإذا قطعت الكرة في الدقيقة الأولى 120 ft، ثم بدأت تقطع في كل دقيقة 40% فقط من المسافة التي قطعتها في الدقيقة السابقة. فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة حتى تقف؟

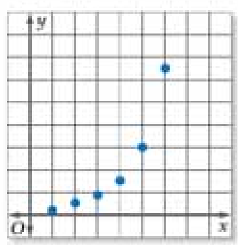
30) **بندول:** يقطع بندول مسافة 12 cm في الأرجحة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الأرجحة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول حتى يتوقف عن الحركة.

31) **ألعاب:** أُسقطت كرة مطاطية من ارتفاع 30 قدمًا فكانت ترتدّ في كل مرة مسافة تعادل 95% من المسافة السابقة. إذا استمرت الكرة في الحركة على هذا المنوال، فجد المسافة التي تقطعها حتى تقف.

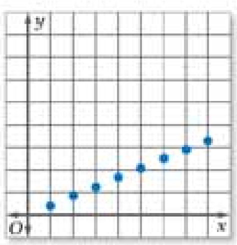
32) **متحف العلوم:** يُتيح أحد المعارض في متحف للعلوم الفرصة للزوار لتجربة حركة الأجسام على زنبرك. فإذا قام أحد الزوار بسحب جسم معلّق بزنبرك إلى الأسفل ثم تركه ليقطع مسافة 1.2 ft إلى الأعلى قبل أن يُغيّر اتجاه حركته، وفي كل مرة يغيّر الجسم اتجاه حركته تنقص المسافة التي يقطعها بمقدار 20% بالمقارنة مع المسافة في الاتجاه الآخر السابق، فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم.

اربط بين كل شكل والوصف المناسب له:

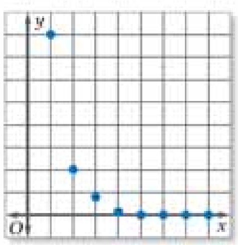
33)



34)



35)



a) متسلسلة هندسية متقاربة

b) متسلسلة هندسية متباعدة

c) متسلسلة حسابية متقاربة

d) متسلسلة حسابية متباعدة

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **اكتشف الخطأ:** طُلِب إلى كل من علي وأحمد أن يجد مجموع المتسلسلة ... $1 - 1 + 1 - 1$ فكانت إجابتاهما كما يأتي. فهل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك:

علي	أحمد
المجموع صفر لأن مجموع كل زوج من الحدود في المتسلسلة هو الصفر.	لا يمكن إيجاد المجموع لأن $\|r\| \geq 1$، والمتسلسلة متباعدة.

37) **برهان:** اشتقّ معادلة مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية.

38) **تحدٍّ:** ما قيم b التي يمكن عندها إيجاد مجموع المتسلسلة ... $+ 3 + 9b + 27b^2 + 81b^3$؟

39) **تبرير:** متى يكون للمتسلسلة الهندسية مجموع، ومتى لا يكون؟ وضّح تبريرك.

40) **مسألة مفتوحة:** اكتب المتسلسلة ... $3 - 6 + 12 -$ باستعمال رمز المجموع وبطريقتين مختلفتين.

41) **اكتب:** وضّح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية متباعدة دائمًا.

تدريب على اختبار

42) مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدها الأول 27 وأساسها $\frac{2}{3}$ هو:

A 81

B 65

C 34

D 18

43) **هندسة:** ضرب نصف قطر كرة كبيرة في العدد $\frac{1}{3}$ للحصول على كرة أصغر.

ما حجم الكرة الصغيرة بالمقارنة مع حجم الكرة الكبيرة؟

A $\frac{1}{9}$ حجم الكبيرة

B $\frac{1}{\pi^3}$ حجم الكبيرة

C $\frac{1}{27}$ حجم الكبيرة

D $\frac{1}{3}$ حجم الكبيرة

مراجعة تراكمية

44) **مسابقات:** تُقيم إحدى محطات التلفاز مسابقة ثقافية، وبعد نهاية كل جولة من المسابقة، يتم إقصاء نصف عدد المشاركين. فإذا كان عدد المشاركين في الجولة الأولى 512 شخصًا، فاكتب معادلة لإيجاد عدد المشاركين المتبقي في المسابقة بعد مرور n جولة. (الدرس 6-3)

45) **حياكة:** مشغل فيه 9 عاملات، تنتج كل منهن فستانًا يوميًا. أوجد الحدود الثمانية الأولى من المتابعة التي تبين مجموع الفساتين التي ينتجها المشغل بعد كل يوم. (الدرس 6-2)

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

46) $(y + 4)(y + 3)$

47) $(9p - 1)(3p - 2)$

توسع
6-4 معمل الحاسبة البيانية
النهايات
Limits

لعلك لاحظت في بعض المتتابعات الهندسية أنه كلما زاد ترتيب الحد في المتتابعة اقتربت قيمته من العدد صفر، وبطريقة أخرى كلما زادت قيمة n فإن قيمة a_n تقترب من الصفر. ويسمّى "الصفر" في هذه الحالة نهاية المتتابعة.

توجد أنواع مختلفة من المتتابعات اللانهائية التي يوجد لها نهاية، ولكن إذا لم تقترب حدود المتتابعة من عدد وحيد، فإننا نقول: إن المتتابعة ليس لها نهاية، أو إن نهاية المتتابعة غير موجودة.

نشاط

أوجد نهاية المتتابعة الهندسية ... , $1 , \frac{1}{4} , \frac{1}{16}$

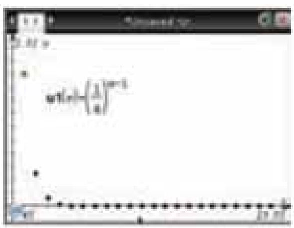
الخطوة 1: أدخل المتتابعة.

صيغة الحد النوني في هذه المتتابعة هي: $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

يمكن عمل جدول للمتتابعة، وذلك بالضغط على المفاتيح:
4:Add Lists & Spreadsheet on واكتب في العمود الأول n، واكتب فيه الأعداد الصحيحة الموجبة، وفي العمود الثاني اكتب صيغة الحد النوني $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ثم اضغط على المفتاح enter .

لاحظ أنه كلما زادت قيمة n ، فإن قيم الحدود تقترب من العدد 0 ، وإذا نزلت إلى الأسفل ستلاحظ أنه عندما $n \geq 7$ فإن قيمة كل حد تكون قريبة من 0 ، مما يشير إلى أن نهاية المتتابعة هي 0 .

الخطوة 2: تمثيل المتتابعة.



ولتمثيل المتتابعة اضغط على المفاتيح:
5:Sequence 3:Graph Type menu 2:Add Graphs on
1:Sequence ثم أدخل صيغة الحد النوني، والحد الأول للمتتابعة ثم اضغط على المفاتيح: enter 6:Zoom - Quadrant 1 4:Window/Zoom menu enter

ستلاحظ أن التمثيل البياني أيضًا يوضّح أن قيم الحدود تقترب من 0. وفي الواقع عندما $n \geq 3$ ، فإن النقاط تظهر كأنها على المحور الأفقي، ممّا يعني أن نهاية المتتابعة هي 0 .

تماريـــن:

أوجد نهاية كل من المتتابعات الآتية:

1) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
2) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
3) $a_n = 5^n$
4) $a_n = \frac{1}{n^2}$
5) $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$
6) $a_n = \frac{n^2}{n + 2}$

6-5

نظرية ذات الحدين
The Binomial Theorem

فيما سبق:

درست التوافيق واستعمالاتها.

والآن:

- أستعمل مثلث باسكال في إيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a+b)^n$
- أستعمل نظرية ذات الحدين في إيجاد مفكوك المقدار $(a+b)^n$.

المفردات:

مثلث باسكال
Pascal's triangle

نظرية ذات الحدين
Binomail Theorem

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يريد مدير معمل للتحاليل الطبية أن يستأجر 8 متخصصين من منطقتين مختلفتين بشكل عشوائي. فإذا كان عدد المتخصصين في المنطقتين متساويًا، فما احتمال أن يختار 6 متخصصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية؟

مثلث باسكال: اكتشف الصينيون في القرن الثالث عشر الميلادي نمطًا من الأعداد سُمّيَ لاحقًا **مثلث باسكال**. ويمكن استعماله لإيجاد معاملات مفكوك المقدار: $(a+b)^n$.

$(a+b)^0$						1					
$(a+b)^1$					1		1				
$(a+b)^2$				1		2		1			
$(a+b)^3$			1		3		3		1		
$(a+b)^4$		1		4		6		4		1	
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5		1

فعلى سبيل المثال يكون:

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال مثلث باسكال

بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، أوجد احتمال اختيار 6 مختصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية وذلك بإيجاد مفكوك $(a+b)^8$.

اكتب ثلاثة صفوف إضافية، مستعملًا النمط أعلاه.

5				1		5		10		10		5		1				
6			1		6		15		20		15		6		1			
7		1		7		21		35		35		21		7		1		
8	1		8		28		56		70		56		28		8		1	

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

بجمع قيم معاملات كثيرة الحدود، نجد أنه يوجد 256 توفيقًا من مختصّي المنطقتين يمكن استئجارهم.

ويُمثّل العدد 28 في المقدار: $28a^6b^2$ عدد التوفيقات التي فيها 6 مختصين من المنطقة الأولى واثنين من المنطقة الثانية، لذلك فإن احتمال استئجار 6 مختصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية يساوي $\frac{28}{256}$ أو 11% تقريبًا.

تحقق من فهمك

1) أوجد مفكوك $(c+d)^9$.

نظرية ذات الحدين: يمكن استعمال **نظرية ذات الحدين**؛ لإيجاد مفكوك ذات الحدين بدلًا من استعمال مثلث باسكال (تذكّر أن: $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$)

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

نظرية ذات الحدين

إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن :

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

إرشادات للدراسة

توافيق تذكر أن : ${}_nC_0=1$ ، ${}_nC_n=1$

عند استعمال النظرية استبدل n بقيمة الأس. ولاحظ كيف ستتبع الحدود النمط نفسه في مثلث باسكال، وكيف تتماثل المعاملات.

مثال 2 استعمال نظرية ذات الحدين

أوجد مفكوك $(a+b)^7$.

الطريقة الأولى 1: استعمال التوافيق .

استبدل 7 مكان n في نظرية ذات الحدين .

$$(a+b)^7 = a^7 + {}_7C_1\, a^6b + {}_7C_2\, a^5b^2 + {}_7C_3\, a^4b^3 + {}_7C_4\, a^3b^4 + {}_7C_5\, a^2b^5 + {}_7C_6\, ab^6 + b^7$$
$$= a^7 + \frac{7!}{6!}a^6b + \frac{7!}{2!5!}a^5b^2 + \frac{7!}{3!4!}a^4b^3 + \frac{7!}{4!3!}a^3b^4 + \frac{7!}{5!2!}a^2b^5 + \frac{7!}{6!}ab^6 + b^7$$
$$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

الطريقة الثانية 2: استعمال مثلث باسكال

استعمل نظرية ذات الحدين لإيجاد القوى، وبدلًا من إيجاد المعاملات باستعمال التوافيق، استعمل الصف السابع من مثلث باسكال.

6		1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

تحقق من فهمك

2) أوجد مفكوك $(x+y)^{10}$.

إرشادات للدراسة

الحاسبة البيانية
يمكن حساب قيمة ${}_nC_r$ باستعمال الحاسبة البيانية.
اضغط الزر MATH ثم اختر 3 PRB

عندما يكون معاملا الحدين في ذات الحدين غير العدد 1، فإن المعاملات لن تكون متماثلة. وفي مثل هذه الحالة استعمل نظرية ذات الحدين.

مثال 3 يختلف المعاملان عن 1

أوجد مفكوك $(5a-4b)^4$.

$$(5a-4b)^4 = (5a)^4 + {}_4C_1\,(5a)^3(-4b) + {}_4C_2\,(5a)^2(-4b)^2 + {}_4C_3\,(5a)(-4b)^3 + {}_4C_4\,(-4b)^4$$
$$= 625a^4 + \frac{4!}{3!}(125a^3)(-4b) + \frac{4!}{2!2!}(25a^2)(16b^2) + \frac{4!}{3!}(5a)(-64b^3) + 256b^4$$
$$= 625a^4 - 2000a^3b + 2400a^2b^2 - 1280ab^3 + 256b^4$$

تحقق من فهمك

3) أوجد مفكوك $(3x+2y)^5$.

تحتاج في بعض الأحيان إلى إيجاد قيمة أحد الحدود في المفكوك، لذا استعمل صيغة مجموع الحدود في مفكوك ذات الحدين ($\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^{k}$).

مثال 4 إيجاد قيمة حد معيّن

أوجد الحد الخامس في مفكوك $(y + z)^{11}$.

الخطوة 1: استعمل صيغة مجموع الحدود في مفكوك نظرية ذات الحدين؛ لكتابة المفكوك.

$$(y + z)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \frac{11!}{k!(11-k)!} y^{11-k} z^{k}$$

الخطوة 2:

$$\frac{11!}{k!(11-k)!} y^{11-k} z^{k} = \frac{11!}{4!(11-4)!} y^{11-4} z^{4}$$ عند الحد الخامس، تكون $k = 4$

$$= 330 y^{7} z^{4}$$ ${}_{11}C_4 = 330$

✓ تحقق من فهمك

4) أوجد الحد السادس في مفكوك $(c + d)^{10}$.

مفهوم أساسي — مفكوك ذات الحدين

أضف إلى مطويتك

في مفكوك ذات الحدين $(a + b)^n$ ،

- **عدد الحدود $n + 1$.**
- **أس a في الحد الأول هو n، وكذلك أس b في الحد الأخير هو n .**
- **يقل أس a بمقدار واحد ، ويزيد أس b بمقدار واحد في أي حدين متتاليين.**
- **مجموع الأسس في أي حد، يساوي n دائمًا.**
- **المعاملات في المفكوك متماثلة.**

✓ تأكد

الأمثلة 1-3 أوجد مفكوك كل مما يأتي:

1) $(g + h)^7$ **2)** $(x + 3)^5$ **3)** $(y - 4z)^4$

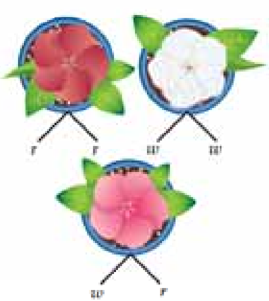
4) **ولادة:** إذا كان احتمال ولادة ذكر يساوي احتمال ولادة أنثى عند المرأة، فاستعمل نظرية ذات الحدين لإيجاد احتمال أن يكون عدد الإناث 5 في ست ولادات. (لا تحسب التوائم).

مثال 4 أوجد الحد المطلوب في مفكوك كل ممّا يأتي:

5) الحد السادس في مفكوك $(2c - 3d)^8$ **6)** الحد الأخير في مفكوك $(5x + y)^5$

7) الحد الأول في مفكوك $(3a + 8b)^5$

8) **وراثة:** يُحدّد لون زهرة معيّنة عن طريق تزاوج جينين.
فإذا كان للزهرة جينان أحمران (r)، فإن الزهرة تكون حمراء وإذا كان لها جينان أبيضان (w) فإن الزهرة تكون بيضاء، أما إذا كان للزهرة جين واحد من كل لون، فإن لونها يكون ورديًّا.
إذا تم التزاوج بين زهرتين ورديتين في المختبر ونتج عن التزاوج 1000 زهرة، فكم زهرة منها وردية اللون ؟



تدرب وحل المسائل

الأمثلة 3–1 أوجد مفكوك كل ممّا يأتي:

9) $(c-d)^7$ 10) $(2a+4b)^4$ 11) $(3a-4b)^5$

12) **لجان،** إذا أردنا تكوين لجنة من 10 طلاب من طلبة الصفين الأول والثاني الثانويين في مدرسة، فما احتمال أن يكون في اللجنة 7 طلاب من الأول الثانوي، علماً بأن عدد طلاب الصفين متساوٍ وأن الاختيار يتم عشوائيًا.

13) **كرة سلة،** إذا كان احتمال النجاح في رمي كرة السلة لأحد اللاعبين، يساوي احتمال الفشل عند رميها من مسافة محددة، فأوجد احتمال أن ينجح هذا اللاعب في إصابة الهدف في 11 مرة من بين 12 محاولة.

مثال 4 أوجد الحد المطلوب في كل ممّا يأتي:

14) الحد الرابع في مفكوك $(y-3x)^6$

15) الحد السادس في مفكوك $(4x+5y)^6$

16) الحد الخامس في مفكوك $(x-4)^9$

17) الحد الرابع في مفكوك $(c+6)^8$

أوجد مفكوك كل ممّا يأتي:

18) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^4$ 19) $\left(2b+\frac{1}{4}\right)^5$

20) **كرة قدم،** إذا كان احتمال أن يسجل خالد هدفًا من رمية حرة يبلغ 70% ، فأوجد احتمال أن يسجل 9 أهداف من 10 رميات.

مسائل مهارات التفكير العليا

21) **تحدٍّ،** أوجد الحد السادس في مفكوك $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{12}$، ووضّح إجابتك .

22) **تبرير،** وضّح كيف تتشابه الحدود في مفكوك كل من $(x+y)^n$, $(x-y)^n$ وكيف تختلف.

23) **مسألة مفتوحة،** اكتب قوة لذات حدين، الحد الثاني في مفكوكها يساوي $6x^4y$.

24) **اكتب،** وضّح كيف يمكنك كتابة حدود مثلث باسكال.

تدريب على اختبار

25) **احتمال،** يحتوي صندوق على 7 أقلام رصاص حمراء مبرية، و5 أقلام رصاص صفراء مبرية، و5 أقلام صفراء غير مبرية. إذا تم سحب قلم من الصندوق بصورة عشوائية فما احتمال أن يكون القلم أصفر علمًا بأنه من الأقلام المبرية؟

A $\frac{5}{12}$ B $\frac{7}{15}$ C $\frac{5}{10}$ D $\frac{1}{5}$

26) أي العلاقات التالية تُمثّل دالة خطية؟

A $y=\frac{x+3}{x+2}$ C $y=\frac{x+3}{2}$

B $y=(3x+2)^2$ D $y=|3x|+2$

مراجعة تراكمية

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كل من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين: (الدرس 6-2)

27) $a_1=-2, a_{n+1}=a_n+5$ 28) $a_6=-7, a_7=-1$

29) أوجد مجموع المتسلسلة $-6+3-\frac{3}{2}+\dots$. (الدرس 6-4)

30) بيّن إذا كانت الجملة $2=\frac{(n+1)(n+1)}{2}$ صحيحة عندما $n=1$ ، أم لا، وفسّر إجابتك. (مهارة سابقة)

توسع **6-5** معمل الجبر

التوافيق ومثلث باسكال
Combinations and Pascal's Triangle

تذكّر أن اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب غير مهمّ يُسمّى توفيقًا. على سبيل المثال، فإن اختيار قطعتين من الشطائر من بين 6 قطع هو توافيق 6 عناصر مأخوذة مثنى مثنى في كل مرّة. ويمكن كتابة عدد التوافيق في هذه الحالة على الصورة: ${}_6C_2$ أو $C(6, 2)$.

نشاط

مسابقة ثقافية تتكون من 5 مراحل، للفائز في كل مرحلة جائزة (يختارها من بين جوائز المسابقة الخمس). فإذا اشترك مهند في المسابقة فإن عدد الجوائز التي سيحصل عليها هو 5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 جوائز. أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الجوائز.

الخطوة 1: إذا لم يفز المتسابق في أية مرحلة من مراحل المسابقة؛ فإنه يحصل على 0 جائزة، وهذا يُمثّل 5 عناصر مأخوذة 0 في كل مرة.

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$ تعريف التوافيق

$${}_5C_0 = \frac{5!}{(5-0)!\,0!}$$ $n = 5\ ,\ r = 0$

$$= \frac{120}{120(1)} = 1$$ $5! = 120\ ,\ 0! = 1$

وهذا يعني أنه توجد طريقة واحدة فقط للحصول على 0 من الجوائز.

أما إذا فاز المتسابق في مرحلة واحدة، فإن أيًا من الجوائز الخمس يمكنه اختيارها. وإذا فاز في مرحلتين فيمكنه اختيار أي جائزتين. وإذا فاز في ثلاث مراحل فيمكنه اختيار أي 3 جوائز وهكذا. بكم طريقة يمكن له اختيار جائزة واحدة، وجائزتين، و3 جوائز، و4 جوائز، و5 جوائز؟

يمكن تحديد عدد الطرق باستعمال مثلث باسكال.

الخطوة 2: تفحّص مثلث باسكال.

اكتب قائمة الصفوف لمثلث باسكال من 0 إلى 5

يمكن الحصول على عدد طرق اختيار الجوائز من الصف الخامس. فالعدد الأول في الصف الخامس يُمثّل عدد طرق الحصول على 0 جائزة، والعدد الثاني يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزة واحدة، والعدد الثالث يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزتين وهكذا.

الصف 0	1
الصف 1	1 1
الصف 2	1 2 1
الصف 3	1 3 3 1
الصف 4	1 4 6 4 1
الصف 5	1 5 10 10 5 1

حلّل النتائج:

1) اكتب تخمينًا حول كيفية استعمال الأعداد في أحد صفوف مثلث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار n ,... ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 من العناصر من بين n من العناصر.

2) على فرض أن قواعد المسابقة تغيّرت بحيث أصبح عدد المراحل 6 وعدد الجوائز 6. فأوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 جوائز.

6-6 البرهان بالاستقراء الرياضي
Proof by Mathematical Induction

فيما سبق:

درست إيجاد مجموع متسلسلة حسابية.

والآن:

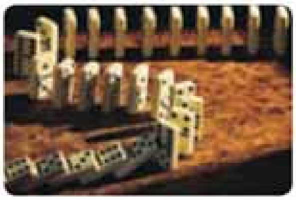
- أبرهن الجمل الرياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.
- أثبت خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضاد.

المفردات:

الاستقراء الرياضي
mathematical induction

فرضية الاستقراء
induction hypothesis

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

إذا صُفَّت قطع الدومينو متقاربة كما في الشكل المجاور فإن كل ما نحتاج إليه لإسقاط القطع جميعها هو إسقاط القطعة الأولى.

وينطبق هذا تمامًا على مبدأ الاستقراء الرياضي.

الاستقراء الرياضي: **الاستقراء الرياضي** هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

مفهوم أساسي — الاستقراء الرياضي

أضف إلى مطويتك

لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افرض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . وهذا الفرض يسمّى **فرضية الاستقراء** .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي $k + 1$.

مثال 1 — برهان المجموع

برهن أن : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $1^3 = 1$

والطرف الأيمن هو $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$. إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افرض أن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$ فرضية الاستقراء

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$ بجمع $(k+1)^3$ لكلا الطرفين

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$ بالجمع

$$= \frac{(k+1)^2\,[k^2 + 4(k+1)]}{4}$$ بالتحليل

$$= \frac{(k+1)^2\,(k^2 + 4k + 4)}{4}$$ بالتبسيط

$$= \frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4}$$ بالتحليل

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها عندما $n = k + 1$ ، وبهذا فإن العلاقة الصحيحة عند جميع الأعداد الطبيعية n

تحقق من فهمك

1) برهن أن : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

وكما في برهان المجموع فإن الاستقراء الرياضي يمكن استعماله أيضًا لبرهنة قابلية القسمة.

مثال 2 برهان قابلية القسمة

برهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن $8^n - 1 = 8^1 - 1 = 7$. وبما أن 7 يقبل القسمة على 7 فإن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افرض أن $8^k - 1$ يقبل القسمة على 7 حيث k عدد طبيعي،
وهذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r بحيث إن $8^k - 1 = 7r$

الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$

$8^k - 1 = 7r$	فرضية الاستقراء
$8^k = 7r + 1$	بإضافة 1 لكلا الطرفين
$8(8^k) = 8(7r + 1)$	بضرب كلا الطرفين في 8
$8^{k+1} = 56r + 8$	بالتبسيط
$8^{k+1} - 1 = 56r + 7$	بطرح 1 من كلا الطرفين
$8^{k+1} - 1 = 7(8r + 1)$	بالتحليل

وبما أن r عدد طبيعي فإن $8r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $7(8r + 1)$ يقبل القسمة على 7 .

إذن، $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7 .

وهذا يبرهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

تحقق من فهمك

2) برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n.

إرشادات للدراسة

قابلية القسمة

العدد r هو عدد كلي يُستعمل لتوضيح قابلية القسمة. فمثلًا إذا ساوى عدد ما المقدار $4r$، فهذا يعني أن هذا العدد يقبل القسمة على 4

الأمثلة المضادة يمكن إثبات خطأ جملة رياضية من خلال الاستقراء الرياضي، وأسهل طريقة لعمل ذلك هي إيجاد مثال مضاد تكون عنده الجملة الرياضية خاطئة.

مراجعة المفردات

مثال مضاد

أحد معاني كلمة مضاد هو مناقض، لذلك فإن المثال المضاد هو مثال يناقض الفرضية.

مثال 3 استعمال المثال المضاد لإثبات خطأ جملة رياضية

أعطِ مثالًا مضادًا يبين أن الجملة $2^n + 2n^2$ تقبل القسمة على 4 حيث n أي عدد طبيعي، هي جملة خاطئة.

اختبر قيمًا مختلفة للعدد n

n	$2^n + 2n^2$	هل تقبل القسمة على العدد 4 ؟
1	$2^1 + 2(1)^2 = 2 + 2 = 4$	نعم
2	$2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8 = 12$	نعم
3	$2^3 + 2(3)^2 = 8 + 18 = 26$	لا

إذن، فالقيمة $n = 3$ تعد مثالًا مضادًا للجملة.

تحقق من فهمك

3) أعطِ مثالًا مضادًا يبيّن خطأ الجملة: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(3n - 1)}{2}$

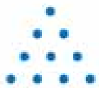
تأكد

مثال 1 برهن صحّة كل من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

2) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3) **نظرية الأعداد** يُسمّى العدد عددًا مثلثيًّا، إذا أمكن تمثيله بنقاط على شكل مثلث كما في الشكل أدناه.



10

a) إذا علمت أن العدد المثلثي الأول هو 1. فجد الأعداد المثلثية الخمسة التالية.

b) اكتب قاعدة لإيجاد العدد المثلثي الذي ترتيبه n .

c) برهن أن مجموع أول n من الأعداد المثلثية يساوي: $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

مثال 2 برهن صحّة كل من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

4) $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9

5) $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3

مثال 3 أعطِ مثالاً مضادًّا يُبيّن خطأ كل من الجملتين الآتيتين:

6) $3^n + 1$ يقبل القسمة على 4

7) $2^n + 3^n$ يقبل القسمة على 4

تدرب وحل المسائل

مثال 1 برهن صحّة كل من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها:

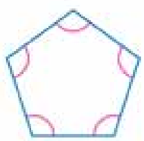
8) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

9) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$

10) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

11) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

12) **هندسة** برهن صحة قاعدة مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب ($180(n-2)$)، حيث n عدد الأضلاع. لكل $n \geq 3$ باستعمال الاستقراء الرياضي والهندسة.



مثال 2 برهن صحّة كل من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

13) $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8.

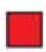
14) $12^n + 10$ يقبل القسمة على 11.

مثال 3 أعطِ مثالاً مضادًّا يُبيّن خطأ كل من الجملتين الآتيتين:

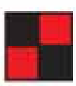
15) $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (2n + 2)^2$

16) $n^2 + n + 23$ عدد أولي.

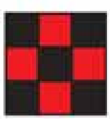
17) **أشكال** بالنظر إلى الأشكال المجاورة.



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

a) يوجد 5 مربعات في الشكل الثاني، ما عدد المربعات في الشكل الثالث؟

b) اكتب متتابعة تُمثّل عدد المربعات في الأشكال الخمسة الأولى.

c) ما عدد المربعات في الشكل الذي بعداه 8×8 ؟

d) اكتب قاعدة لإيجاد عدد المربعات في الشكل الذي بعداه $n \times n$

🌍 **الربط مع الحياة**

تظهر حدود متتابعة فيبوناتشي كثيرًا، كما في بذور قرص تباع الشمس

18) **متتابعة فيبوناتشي:** تبدأ متتابعة فيبوناتشي بالحدود ... , 8 , 5 , 3 , 2 , 1 , 1، ويكون الحد التالي فيها مساويًا لمجموع الحدين السابقين له مباشرة (وذلك بعد الحد الثاني). فإذا كان f_n يمثل عدد فيبوناتشي ذا الرقم n، فبرهن أن:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$$

برهن صحة كل جملة مما يأتي لجميع الأعداد الطبيعية، أو أعط مثالاً مضادًا يُثبت خطأها:

19) $7^n + 5$ يقبل القسمة على 6

20) $18^n - 1$ يقبل القسمة على 17

21) $n^2 + 21n + 7$ عدد أولي.

22) $n^2 + 3n + 3$ عدد أولي.

23) $500 + 100 + 20 + \dots + 4 \cdot 5^{4-n} = 625\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

مسائل مهارات التفكير العليا

24) **تحدٍّ:** اكتب قاعدة تُمثّل المجموع $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$، ثم برهنها باستعمال الاستقراء الرياضي.

تبرير: حدّد إذا كانت كل من الجملتين الآتيتين صحيحة أم خطأ. وضّح إجابتك.

25) إذا لم تستطع إيجاد مثال مضاد في جملة رياضية فإنها تكون صحيحة.

26) إذا كانت جملة ما صحيحة عند $n = k$ وعند $n = k + 1$، فإنها تكون صحيحة عند $n = 1$

27) **تحدٍّ:** برهن أن: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

28) **مسألة مفتوحة:** اكتب قاعدة لإيجاد مجموع متسلسلة ما، ثم برهن على صحتها باستعمال الاستقراء الرياضي.

29) **اكتب:** وضّح الاستقراء الرياضي بمثال من واقع الحياة (غير قطع الدومينو).

تدريب على اختبار

30) أي الأعداد الآتية يُعدّ مثالًا مضادًا لإثبات خطأ الجملة:

$n^2 + n - 11$ عدد أولي

A $n = -6$

B $n = 4$

C $n = 5$

D $n = 6$

31) **مبدأ العد:** يريد حسن وضع كلمة سر للحاسوب الخاص به مكوّنة من 7 رموز بحيث تكون الرموز الثلاثة الأولى مكوّنة من أحرف اسمه والرموز الأربعة التالية مكونة من أرقام العدد 1986 والتي هي سنة ميلاده. ما أكبر عدد من كلمات السر التي يستطيع حسن تكوينها بهذه الطريقة؟

A 72

B 144

C 288

D 576

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحد المطلوب في كل ممّا يأتي: (الدرس 6-5)

32) الحد الرابع في مفكوك $(x + 2y)^6$

33) الحد الخامس في مفكوك $(a + b)^6$

34) الحد الرابع في مفكوك $(x - y)^9$

أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين :

35) $5 + 10 + 15 + 20 + \dots + 1000$ (الدرس 6-2)

36) $\frac{1}{5} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} - \frac{1}{135} + \dots$ (الدرس 6-4)

الفصل **6**

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية (الدرسان 2-6 ، 1-6)

- الحد النوني a_n في متتابعة حسابية حدها الأول a_1 وأساسها d يُعطى بالصيغة:
  $a_n = a_1 + (n-1)d$، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متتابعة حسابية: S_n يعطى بإحدى الصيغتين:
  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$.

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية (الدرسان 4-6 , 3-6)

- الحد النوني a_n في متتابعة هندسية حدها الأول a_1 وأساسها r يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متسلسلة هندسية S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:
  $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$, $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$ ، حيث $r \neq 1$
- مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية يُعطى بالصيغة:
  $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ ، حيث $|r| < 1$.

نظرية ذات الحدين (الدرس 5-6)

- نظرية ذات الحدين:
  $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} b^k$$

الاستقراء الرياضي (الدرس 6-6)

- الاستقراء الرياضي هو طريقة أو أسلوب لبرهنة الجمل المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك

المفردات

- المتتابعة ص 62
- الحد ص 62
- المتتابعة غير المنتهية ص 62
- المتتابعة المنتهية ص 62
- المتتابعة الحسابية ص 62
- أساس المتتابعة الحسابية الفرق المشترك ص 62
- المتتابعة الهندسية ص 64
- أساس المتتابعة الهندسية النسبة المشتركة ص 64
- الأوساط الحسابية ص 69
- المتسلسلة ص 70
- المتسلسلة الحسابية ص 70
- المجموع الجزئي ص 70
- رمز المجموع ص 71
- الأوساط الهندسية ص 77
- المتسلسلة الهندسية ص 78
- المتسلسلة الهندسية غير المنتهية ص 83
- المتسلسلة المتقاربة ص 83
- المتسلسلة المتباعدة ص 83
- ما لا نهاية ص 85
- مثلث باسكال ص 90
- نظرية ذات الحدين ص 90
- الاستقراء الرياضي ص 95
- فرضية الاستقراء ص 95

اختبار المفردات

حدّد إذا كانت كل من العبارات الآتية صحيحة أم لا. وإذا كانت غير صحيحة، فعدّل المصطلح الذي تحته خط لتصبح صحيحة:

1) تُسمّى المتسلسلة غير المنتهية التي يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

2) الاستقراء الرياضي هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية

3) الأوساط الحسابية للمتتابعة، هي الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

4) الحد هو سلسلة من الأعداد مرتّبة بطريقة معينة.

5) يُسمّى مجموع أول n حدًا من متسلسلة، المجموع الجزئي.

6) المتتابعة الهندسية هي متتابعة نحصل على كل حد فيها بإضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق.

7) تُسمّى المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي لا يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

8) 17 , 11 هما وسطان هندسيان بين العددين 23 , 5 في المتتابعة $5, 11, 17, 23$.

9) باستعمال نظرية ذات الحدين فإن:
$(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16.$

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

6-1 المتتابعات بوصفها دوال ص 62-67

أوجد الحد المطلوب في كل من المتتابعات الحسابية الآتية:

10) $a_1 = 9, d = 3, a_{14} = ?$

11) $a_1 = -3, d = 6, a_{22} = ?$

12) $a_1 = 10, d = -4, a_9 = ?$

13) $a_1 = -1, d = -5, a_{18} = ?$

مثال 1

أوجد الحد الحادي عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها
$a_1 = -15, d = 6$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ الحد النوني

$a_{11} = -15 + (11-1)6$ $n = 11, a_1 = -15, d = 6$

$a_{11} = 45$ بالتبسيط

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية ص 68-75

أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتتابعات الآتية:

14) $-12, \_\_, \_\_, \_\_, 8$

15) $15, \_\_, \_\_, 29$

16) $12, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, -8$

17) $72, \_\_, \_\_, \_\_, 24$

18) **توفير** يوفر باسل 160 ريالًا كل شهرين. إذا استمر بالتوفير بهذا المعدل لمدة سنتين، فما المبلغ الذي يوفره في نهاية السنتين؟

أوجد S_n لكل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

19) $a_1 = 16, a_n = 48, n = 6$

20) $a_1 = 8, a_n = 96, n = 20$

21) $9 + 14 + 19 + \cdots + 74$

22) $16 + 7 + -2 + \cdots + -65$

23) **دراما** لأداء دور في مسرحية تاريخية، بدأ أيمن بالتدرب على النص مرتين في اليوم الأول، وأربع مرات في اليوم الثاني، وست مرات في اليوم الثالث وهكذا. ما عدد المرات التي سيتدربها في اليوم السادس؟

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

24) $\sum_{k=5}^{21}(3k-2)$

25) $\sum_{k=0}^{10}(6k-1)$

26) $\sum_{k=4}^{12}(-2k+5)$

مثال 2

أوجد الوسطين الحسابيين بين العددين 3, 39 .

$a_n = a_1 + (n-1)d$ الحد النوني

$a_4 = 3 + (4-1)d$ $n = 4, a_1 = 3$

$39 = 3 + 3d$ $a_4 = 39$

$12 = d$ بالتبسيط

الوسطان الحسابيان هما: $3 + 12 = 15, 15 + 12 = 27$

مثال 3

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية التي فيها:
$a_1 = 18, a_n = 56, n = 8$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$ $n = 8, a_1 = 18, a_n = 56$

$= 296$ بالتبسيط

مثال 4

أوجد قيمة $\sum_{k=3}^{15}(5k+1)$

استعمل الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

في المتسلسلة 13 حدًا، وحدها الأول $a_1 = 5(3) + 1 = 16$

$a_{13} = 5(15) + 1 = 76$

$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$

$= 598$

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية ص 81-76

أوجد الحد المطلوب في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

27) $a_1 = 5, r = 2, a_7 = ?$

28) $a_1 = 11, r = 3, a_3 = ?$

29) $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, a_5 = ?$

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كل من المتتابعات الآتية:

30) $6, \_\_, \_\_, 162$

31) $8, \_\_, \_\_, \_\_, 648$

32) $-4, \_\_, \_\_, 108$

33) **توفير** مع سعيد 1000 ريال، إذا بدأ يصرف يوميًّا نصف المبلغ الموجود. فكم سيكون المبلغ المتبقي بعد مرور 4 أيام؟

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الآتيتين:

34) $\sum_{k=1}^{7} 3 \cdot (-2)^{k-1}$

35) $\sum_{k=1}^{8} -1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

مثال 5

أوجد الحد السادس في المتتابعة الهندسية التي فيها $a_1 = 9, r = 4$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ الحد النوني

$a_6 = 9 \cdot 4^{6-1}$ $n = 6, a_1 = 9, r = 4$

$a_6 = 9216$

مثال 6

أوجد وسطين هندسيين بين 1, 27

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ الحد النوني

$a_4 = 1 \cdot r^{4-1}$ $n = 4, a_1 = 1$

$27 = r^3$ $a_4 = 27$

$3 = r$ بالتبسيط

الوسطان الهندسيان هما: $3(3) = 9$ ، $1(3) = 3$.

مثال 7

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{6} 2 \cdot (4)^{k-1}$.

$S_6 = \frac{2 - 2 \cdot 4^6}{1 - 4}$ $n = 6, a_1 = 2, r = 4$

$= \frac{-8190}{-3} = 2730$ بالتبسيط

6-4 المتسلسلات الهندسية غير المنتهية ص 88-83

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الهندسية غير المنتهية فيما يأتي (إن وجد):

36) $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$

37) $\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \dots$

38) $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

39) **رياضة:** أُسقطت كرة من سطح بناية ارتفاعها 60 ft، فارتدت مسافة $\frac{2}{3}$ الارتفاع السابق. إذا استمر ارتداد الكرة بهذه الطريقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة إلى أن تتوقف؟

مثال 8

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي فيها $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

$S = \frac{a_1}{1 - r}$ صيغة المجموع

$= \frac{15}{1 - \frac{1}{3}}$ $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

$= \frac{15}{\frac{2}{3}} = 22.5$ بالتبسيط

دليل الدراسة والمراجعة

6-5 نظرية ذات الحدين ص 93–90

أوجد مفكوك كل ممّا يأتي:

40) $(a+b)^3$

41) $(y-3)^7$

42) $(3-2z)^5$

43) $(4a-3b)^4$

44) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^5$

أوجد الحد المطلوب في كل ممّا يأتي:

45) الحد الثالث في مفكوك $(a+2b)^8$

46) الحد السادس في مفكوك $(3x+4y)^7$

47) الحد الثاني في مفكوك $(4x-5)^{10}$

مثال 9

أوجد مفكوك $(x-3y)^4$.

$$(x-3y)^4 = x^4 + {}_4C_1x^3(-3y) + {}_4C_2x^2(-3y)^2 + {}_4C_3x(-3y)^3 + {}_4C_4(-3y)^4$$
$$= x^4 + -12x^3y + 54x^2y^2 + -108xy^3 + 81y^4$$

مثال 10

أوجد الحد الرابع في مفكوك $(x+y)^8$.

استعمل نظرية ذات الحدين لكتابة المفكوك

$$(x+y)^8 = \sum_{k=0}^{8} \frac{8!}{k!(8-k)!}x^{8-k}y^k$$

بالنسبة للحد الرابع فإن $k=3$، لذلك يكون الحد الرابع هو

$$\frac{8!}{3!(8-3)!}x^{8-3}y^3 = 56x^5y^3$$

6-6 البرهان بالاستقراء الرياضي ص 98–95

برهن صحة كل جملة مما يأتي للأعداد الطبيعية جميعها:

48) $2+6+12+\cdots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49) 7^n-1 يقبل القسمة على 6 .

50) 5^n-1 يقبل القسمة على 4 .

أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن أن كلًّا من الجمل الآتية خطأ:

51) 8^n+3 يقبل القسمة على 11 .

52) $6^{n+1}-2$ يقبل القسمة على 17 .

53) n^2+2^n+4 عدد أولي .

54) $n+19$ عدد أولي.

مثال 11

برهن أن 9^n+3 يقبل القسمة على 4

الخطوة 1 عندما $n=1$ فإن: $9^n+3 = 9^1+3 = 12$. وبما أن 12 يقبل القسمة على 4 فالجملة صحيحة عندما $n=1$.

الخطوة 2 افرض أن 9^k+3 يقبل القسمة على 4 حيث k عدد صحيح موجب . إذن $9^k+3=4r$ حيث r عدد كلي.

الخطوة 3 $9^k+3=4r$

$$9^k = 4r-3$$
$$9^{k+1} = 36r-27$$
$$9^{k+1}+3 = 36r-27+3$$
$$9^{k+1}+3 = 36r-24$$
$$9^{k+1}+3 = 4(9r-6)$$

وبما أن r عدد كلي فإن، $9r-6$ عدد كلي، وهذا يعني أن: $9^{k+1}+3$ يقبل القسمة على 4. إذن الجملة صحيحة عند $n=k+1$

إذن، 9^n+3 يقبل القسمة على 4 لكل عدد صحيح موجب n .

اختبار الفصل

أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد).

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 2^{n-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (4) \cdot (0.5)^{n-1}$

3) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية $81, 72, 63, \dots$.

4) أوجد الحد الخامس والعشرون في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 9, d = 5$

5) **اختيار من متعدد** ما الحد الثامن في المتتابعة الحسابية $18, 20.2, 22.4, 24.6, \dots$ ؟

A 26.8 C 31.2

B 29 D 33.4

6) أوجد أربعة أوساط حسابية بين $-9, 11$.

7) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 11, n = 14, a_n = 22$

8) **اختيار من متعدد** ما الحد التالي في المتتابعة الهندسية أدناه؟

$10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32} \dots$

A $\frac{13}{32}$ C $\frac{5}{128}$

B $\frac{5}{32}$ D $\frac{5}{8}$

9) أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين $6, 1536$

10) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها $a_1 = 15, r = \frac{2}{3}, n = 5$

أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

11) $\sum_{k=2}^{12} (3k - 1)$

12) $45 + 37 + 29 + \dots + -11$

13) اكتب الكسر الدوري $0.\overline{65}$ على صورة كسر اعتيادي.

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كل من المتتابعتين الآتيتين:

14) $a_1 = -1, a_{n+1} = 3a_n + 5$

15) $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + n$

16) أوجد مفكوك $(2a - 3b)^4$

17) أوجد معامل الحد الخامس في مفكوك $(m + 3n)^6$؟

18) أوجد الحد الرابع في مفكوك $(c + d)^9$.

برهن صحة كل من الجملتين الآتيتين، للأعداد الطبيعية جميعها:

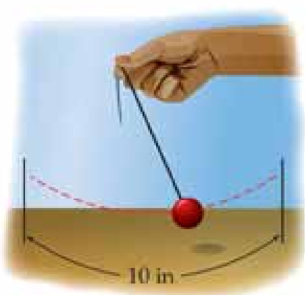
19) $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$

20) $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10 .

21) أوجد مثالًا مضادًا يُبيّن خطأ الجملة الآتية: $2^n + 4^n$ يقبل القسمة على 4

22) **مدرسة** إذا كان عدد طلبة الصف الأول الثانوي يساوي عدد طلبة الصف الثاني الثانوي في مدرسة ثانوية، وأراد معلم العلوم اختيار 8 طلبة عشوائيًا من الصفين لتمثيل المدرسة في مسابقة للعلوم، فما احتمال أن يكون 5 من الطلبة الثمانية من الصف الأول الثانوي؟

23) **بندول** يقوم سعد بأرجحة بندول بحيث تتناقص المسافة التي يقطعها البندول في كل أرجحة بنسبة 15%. إذا كانت أول مسافة قطعها البندول 10 in، فجد المسافة الكلية التي يكون البندول قد قطعها عندما يتوقف عن الحركة.



الفصل 6

اختبار تراكمي

للفصول 6 – 1

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل ممّا يأتي:

1) أوجد الحد التالي في المتتابعة الحسابية:

7, 13, 19, 25, 31, ...

A 36

B 37

C 38

D 39

2) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{15}(8k-1)$

A 119

B 826

C 945

D 1072

3) صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية الممثلة في الجدول المجاور هي:

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

A $a_n = (5)^n$

B $a_n = 5(2)^{n-1}$

C $a_n = 2(5)^{n-1}$

D $a_n = 5(2)^n$

4) تدَّعي شركة صانعة لأحد أنواع مصافي الهواء، أن المصفاة تستطيع إزالة 90% من الشوائب في الهواء الداخل إلى المصفاة. إذا تم إدخال الكمية نفسها من الهواء إلى المصفاة 3 مرات متتابعة، فما نسبة الشوائب التي سوف تزال؟

A 0.1%

B 0.01%

C 99.99%

D 99.9%

5) أي المتسلسلات الهندسية الآتية غير متقاربة؟

A $\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$

B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

C $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

D $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

6) إذا علمت أن $x - 5$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + k$ ، فما قيمة k ؟

A 1

B 7

C 15

D 35

إجابة قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

7) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفتين أدناه؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

8) أوجد مفكوك $(c+d)^6$ باستعمال نظرية ذات الحدين.

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

9) $\frac{12a}{5b} \cdot \frac{25a^2b^3}{8c}$

10) $\frac{x^2-x-20}{2x+8} \cdot \frac{3x}{x-5}$

11) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$، فما قيمة $f[g(6)]$؟

إجابة طويلة

أجب عن كل مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

12) برهن أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح زوجي.

13) يقطع خالد مسافة معيّنة على دراجة هوائية في 2.5 ساعة. وإذا زاد من سرعته فإنه يقطع المسافة نفسها في ساعتين.

a) هل يُمثّل هذا الوضع تناسبًا طرديًّا أم تناسبًا عكسيًّا؟ وضّح إجابتك.

b) إذا كانت سرعته عندما قطع المسافة في 2.5 ساعة تبلغ 12 km/h، فكم يجب أن تكون سرعته ليقطع المسافة ذاتها في ساعتين؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع حل السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس ...	6-2	6-2	6-3	6-3	6-4	3-7	2-3	6-5	5-1	5-1	4-1	6-6	5-5

الفصل 7

الاحتمالات
Probabilities

فيما سبق:

درست النواتج والحوادث، واحتمالات الحوادث البسيطة في التجارب العشوائية.

والآن:

- أمثل فضاء العيِّنة.
- أستعمل التباديل والتوافيق مع الاحتمال.
- أجد الاحتمال باستعمال الطول والمساحة.
- أجد احتمالات الحوادث المركبة.

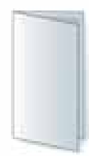
لماذا؟

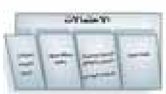
ألعاب: يمكن استعمال الاحتمال للتنبؤ بإمكانية وقوع النواتج المختلفة لبعض الألعاب التي نمارسها.

المطويات منظم أفكار

الاحتمالات اعمل هذه المطويّة لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الاحتمالات. مبتدئًا بورقة A4.

1. **اطو الورقة** طوليًا.
2. **اطو الورقة** إلى نصفين مرتين.
3. **قصّ كل خط طي أفقيًا** في العمود الأيسر حتى خط المنتصف.
4. **اكتب العناوين** كما في الشكل.





التهيئة للفصل 7

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$
2) $\frac{7}{9}+\frac{2}{6}$
3) $\frac{2}{5}+\frac{7}{8}$
4) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}$
5) $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{24}$
6) $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$

7) **كرة قدم:** لدى فريق كرة قدم 54 L من الماء البارد في قوارير سعة كل منها 500 ml. كم قارورة لديهم؟

إذا أُلقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي:

8) أن يكون العدد الظاهر أكبر من 1
9) أن يكون العدد الظاهر فرديًّا
10) أن يكون العدد الظاهر أقل من 2
11) أن يكون العدد الظاهر (1 أو 6)
12) **احتمالات:** أُلقي مجسم ذو 20 وجهًا متطابقًا، كُتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 26 ماعدا الأعداد 4, 8, 12, 16, 20, 24. ما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عددًا أوليًّا؟

يبيّن الجدول الآتي نواتج تجربة استقرار مؤشر دوار لقرص مقسم إلى قطاعات مرقمة بالأعداد 4-1.

النتيجة	الإشارات	التكرار
1					3
2	卌 ||	7
3	卌		6
4						4

13) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند العدد 4؟
14) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد فردي؟
15) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد زوجي؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط المقدار: $\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}$.

$\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6\cdot1}{9\cdot2}$ بضرب البسط في البسط والمقام في المقام

$=\frac{6}{18}$

$=\frac{1}{3}$ بالتبسيط

مثال 2

إذا أُلقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

$$P(\text{أقل من } 5)=\frac{\text{عدد نواتج الحادثة}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

احتمال ظهور عدد أقل من 5 هو $\frac{2}{3}$، ويساوي 67% تقريبًا

مثال 3

في تجربة رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، ظهرت النواتج المبينة في الجدول. أوجد الاحتمال التجريبي لظهور العدد 5 .

النتيجة	الإشارات	التكرار
1						4
2	卌 ||	7
3	卌 |||	8
4						4
5				2
6	卌	5

$$P(5)=\frac{\text{عدد مرات ظهور } 5}{\text{عدد جميع النواتج}}=\frac{2}{30}$$

الاحتمال التجريبي للحصول على 5 هو $\frac{2}{30}$ ويساوي 6.7% تقريبًا

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

7-1

تمثيل فضاء العيِّنة
Representing Sample Spaces

لماذا؟

في مباريات كرة القدم، يلقي الحكم عادة، قطعة نقد مرة واحدة ليحدد أي الفريقين سيختار المكان في الملعب أولًا. وقد تكون النتيجة هي الشعار أو الكتابة.

تمثيل فضاء العيِّنة

لقد تعلمت ما يأتي حول التجارب والنواتج والحوادث.

التعريف	مثال
التجربة: هي موقف يتضمن فرصًا تؤدي إلى نتائج تُسمى نواتج.	في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.
النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج من تجربة ما.	النواتج الممكنة هي: الشعار أو الكتابة.
الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة.	إحدى حوادث هذه التجربة ظهور الكتابة.

فضاء العيِّنة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة، أو الجدول، أو **الرسم الشجري**.

مثال 1 تمثيل فضاء العيِّنة

أُلقيت قطعة نقد مرتين، مثِّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما: الشعار (L) والكتابة (T).

القائمة المنظمة

اكتب أزواج النواتج الممكنة من الرمية الأولى مع النواتج الممكنة من الرمية الثانية.

L , L   T , L

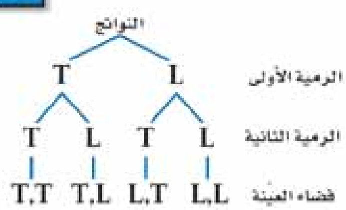
L , T   T , T

الجدول

دوِّن النواتج الممكنة للرمية الأولى في العمود الأيمن، والنواتج الممكنة للرمية الثانية في الصف العلوي.

النواتج	شعار (L)	كتابة (T)
شعار (L)	L, L	L, T
كتابة (T)	T, L	T, T

الرسم الشجري



تحقق من فهمك

1) أُلقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضًا. مثِّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

فيما سبق:

درستُ حساب الاحتمال التجريبي.

والآن:

- أستعمل القوائم، والجداول، والرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة.
- أستعمل مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

المفردات:

فضاء العيِّنة
sample space

الرسم الشجري
tree diagram

تجربة ذات مرحلتين
two-stage experiment

تجربة متعددة المراحل
multi-stage experiment

مبدأ العد الأساسي
Fundamental Counting Principle

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

المكعب المرقم

هو مكعب تحمل أوجهه الأرقام من 1 إلى 6

التجربة المعروضة في المثال 1 هي مثال على **تجربة ذات مرحلتين**؛ لأنها تمت على مرحلتين.
والتجارب التي تحتوي على أكثر من مرحلتين تسمى **تجارب متعددة المراحل**.

مثال 2 من واقع الحياة — الرسم الشجري للتجارب المتعددة المراحل

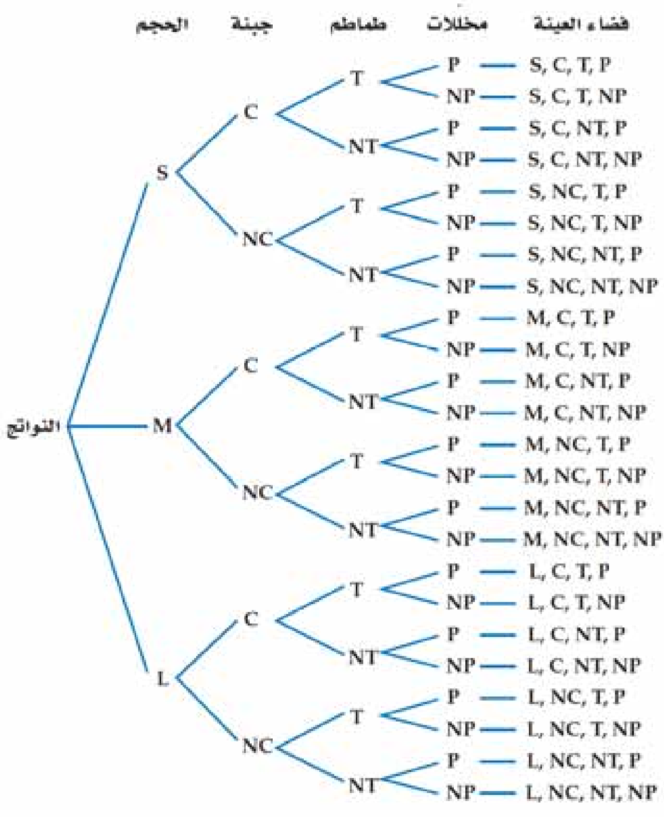
شطائر: يبيع أحد المطاعم شطائر اللحم بثلاثة أحجام (صغير – وسط – كبير)، بالجبنة والطماطم والمخللات، أو باثنين منها، أو بأحدها، أو بدونها.

مثّل فضاء العيّنة لأنواع الشطائر الممكنة باستعمال الرسم الشجري.

يتكون فضاء العيّنة من أربع مراحل هي:

- شطيرة من اللحوم بأحجام (S: صغير، M: وسط، L: كبير)
- جبنة (مع جبنة C، بدون جبنة NC)
- طماطم (مع طماطم T، بدون طماطم NT)
- مخلّلات (مع مخلّلات P، بدون مخلّلات NP)

أنشئ الرسم الشجري للمراحل الأربع.



تحقق من فهمك

2) **هواتف:** يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره بلون فضي (S) أو أسود (B) أو أحمر (R)، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC). ويمكنه أن يحصل على سماعات (H) و/ أو غطاء للجهاز (W). مثّل فضاء العيّنة لهذا الموقف بالرسم الشجري.

تنبيه!

اختصار مراحل

في السؤال الثالث من الصورة المرافقة للمثال 2، يختصر الحرفان: و/ أو " أربع مراحل للاختيار هي: مع الطماطم فقط، أو مع المخللات فقط، أو مع الطماطم والمخلل أو بدون طماطم ولا مخلل.

قراءة الرياضيات

رموز الرسم الشجري

اخترْ رموزًا واضحة لا غموض فيها للنواتج في الرسم الشجري. ففي المثال 2، تدل C على اختيار الجبنة، NC تدل على عدم اختيار الجبنة، أما NT وNP فتدلان أيضًا على أنها دون طماطم ودون مخلّلات بالترتيب.

مبدأ العد الأساسي قد لا يكون تسجيل جميع نواتج فضاء العيِّنة في التجارب ذات المرحلتين أو المتعددة المراحل عمليًّا أو ضروريًّا. لذا يمكن استعمال **مبدأ العد الأساسي** لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

مفهوم أساسي — مبدأ العدّ الأساسي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العيِّنة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز: في تجربة عدد مراحلها k. افرض أن:

n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى

n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى

⋮

n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها k يساوي:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

إرشادات للدراسة

قاعدة الضرب

يُسمى مبدأ العدّ الأساسي أحيانًا قاعدة الضرب للعد.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال مبدأ العد الأساسي

اختيار ثوب: يريد سعد شراء ثوبٍ من بين البدائل المبينة في الجدول المجاور. ما عدد الخيارات المتاحة أمامه ليختار ثوبًا مناسبًا؟

البدائل	عدد الخيارات
القماش	5
اللون	6
الأكمام	3
القبّة	3
الفتحة الأمامية	2
الأزرار	2

استعمل مبدأ العد الأساسي.

القماش		اللون		الأكمام		القبّة		الفتحة الأمامية		الأزرار		
5	×	6	×	3	×	3	×	2	×	2	=	1080

إذن، لدى سعد 1080 خيارًا ليختار ثوبًا مناسبًا.

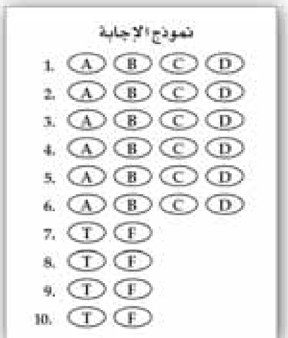
الربط مع الحياة

اعتاد الرجال في منطقة الخليج العربي على لبس الأثواب الواسعة ذات اللون الأبيض أو الألوان الفاتحة، وهذا يعود لاعتبارات عديدة، أهمها البعدان: المناخي والجمالي.

تحقق من فهمك

3) أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:

A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور.



B) رمي مكعب مرقم أربع مرات.

C) **أحذية:** اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات: 45 ، 44 ، 43 ، 42 ، 41 ، 40 ، 39 ، بلون أسود أو بني أو رمادي أو أبيض، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي، وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء.

تأكـد

مثال 1 مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

1) عندما يضرب اللاعب ركلة الجزاء فإنه يسجل هدفًا (G) أو لا يسجل (O). افرض أن اللاعب ضرب ركلة جزاء مرتين.

2) سحب سمير بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من كيس فيه بطاقات كتب عليها: (عصير مجاني J) أو (دفتر ملحوظات مجاني N).

مثال 2 **3)** **ملابس:** تريد سمر حضور حفلة، وعليها أن تختار ما ترتديه في الحفلة من القائمة المجاورة. مثّل فضاء العيّنة في هذا الموقف بالرسم الشجري.

مثال 3 **4)** عُرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم تتضمن الأصناف المبينة في الجدول المجاور، وكل صنف منها يحتوي على عدد من الأنواع. افرض أنه يتم اختيار طبق واحد من كل صنف ونوع، فما عدد النواتج الممكنة؟

قائمة المأكولات	عدد البدائل
المقبلات	8
الحساء	4
السلطة	6
الطبق الرئيس	12
الحلوى	9

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري:

5) تنظم إحدى المدارس الثانوية زيارة إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي (C) وإلى جامعة الملك سعود (U). لطلبة الصف الأول والثاني الثانوي.

6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تبادل ثقافي خلال كل من السنتين الأخيرتين في الكلية، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.

7) يتكون اختبار من نماذج مختلفة من الأسئلة، وكل نموذج يتكون من سؤالين يتعلقان بالمثلثات؛ أحدهما يشتمل على مثلث منفرج الزاوية (O) أو مثلث حاد الزوايا (A)، والآخر يشتمل على مثلث متطابق الضلعين (E) أو مثلث مختلف الأضلاع (N).

8) **رسم:** ينفّذ بعض الطلاب مشروعين للرسم، فيستعملون أحد نوعين مختلفين من الألوان لكل مشروع. مثّل فضاء العيّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

مثال 2 مثّل فضاء العيّنة مستعملًا الرسم الشجري في كل مما يأتي:

9) **سيارات:** يريد فيصل شراء سيارة: صغيرة (S) أو عائلية (F) أو نقل (T)، بمقاعد مغطاة بالجلد (L) أو القماش (V)، مع إضافات: شاشة ملاحة (N) و/ أو سقف متحرك (R).

10) **حقائب:** يبيع مصنع نوعين من حقائب السفر بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بنيًّا أو أزرق، وقد يكون لها مفتاح أو قفل أرقام.

مثال 3

11) تجري في إحدى المدارس الثانوية قرعة لاختيار مسؤولي أنشطة من الطلبة. حيث كان عدد الطلاب المرشحين للأنشطة المختلفة: 3 طلاب للنشاط الأول وَ 4 طلاب للنشاط الثاني وَ 5 طلاب للنشاط الثالث وَ طالبان للنشاط الرابع، على أن لا يرشح الطالب نفسه لأكثر من نشاط. فما عدد النواتج الممكنة؟

12) **فن:** أعطى معلم طلابه خيارين لرسم شكلين رباعيين: أحدهما أطوال أضلاعه متساوية، والآخر فيه ضلعان متوازيان على الأقل. مثّل فضاء العيِّنة باستعمال الجدول والرسم الشجري.

13) **إفطار:** يقدم مطعم في وجبة الإفطار البيض مع الخضراوات أو اللحم أو الجبن، ويقدم معها الخبز الأبيض أو الأسمر أو خبز النخالة. ما عدد النواتج المختلفة من أطباق البيض ونوع الخبز إذا كان يُستعمل مع البيض صنف واحد من الخضراوات؟

14) **دراجات:** اشترى عصام قفلًا رقميًّا لدراجته يفتح باستعمال أربعة أرقام من 0 إلى 9.

a) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل إذا سمح له بتكرار أي رقم؟

b) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل، على أن يستعمل الرقم مرة واحدة فقط؟ وضّح إجابتك.

15) **تمثيلات متعددة:** تتم هذه التجربة على مرحلتين متعاقبتين؛ أولًا دوّر المؤشر 1 في الشكل أدناه، فإذا أشار إلى اللون الأحمر فارم قطعة نقد، وإذا أشار إلى اللون الأصفر فارم مكعب نقاط، وإذا أشار إلى اللون الأخضر فألقِ مكعبًا مرقمًا، وإذا أشار إلى اللون الأزرق فدوّر المؤشر 2.

a) **هندسيًّا:** استعمل الرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة للتجربة.

b) **منطقيًّا:** ارسم شكل فن لتمثيل النواتج الممكنة للتجربة.

c) **تحليليًّا:** ما عدد النواتج الممكنة؟

d) **لفظيًّا:** هل يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد هذه النواتج؟ وضّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

إرشادات للدراسة

عدم إرجاع العناصر
إذا اخترت عنصرًا من مجموعة عناصر دون إرجاعه إلى المجموعة، فإن عدد عناصر المجموعة يتغير وكذلك عدد النواتج الممكنة.

16) **تحدٍّ:** يحتوي صندوق على n من الكرات المختلفة. إذا سحبت 3 منها على التوالي دون إرجاع، فما عدد النواتج الممكنة؟ برر إجابتك.

17) **مسألة مفتوحة:** قد لا يكون الرسم الشجري للتجربة متماثلًا. صِفْ تجربة ذات مرحلتين تمثل ذلك، ثم ارسم الرسم الشجري لهذه التجربة، وبرر إجابتك.

18) **تبرير:** تجربة متعددة المراحل، عدد مراحلها k وعدد النواتج الممكنة لكل مرحلة n. اكتب معادلة تستطيع من خلالها إيجاد العدد الكلي للنواتج الممكنة p، ووضح إجابتك.

19) **اكتب:** وضّح متى يكون استعمال الرسم الشجري ضروريًّا لعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة ما، ومتى يكفي استعمال مبدأ العدّ الأساسي.

20) **اكتب:** وضّح لماذا لا يمكن استعمال الجدول لتمثيل فضاء العينة لتجربة متعددة المراحل.

تدريب على اختبار

21) يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء. إذا كان لديه أربعة أصدقاء، فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم؟

A 4 **C** 8
B 6 **D** 9

22) تحتوي قائمة الطعام في أحد المطاعم على 5 أنواع للطبق الرئيس، و 4 أنواع من الحساء، و 3 أنواع من الحلوى. كم طلبًا مختلفًا يمكن تقديمه إذا اختار الشخص طبقًا رئيسًا واحدًا، ونوعًا من الحساء، وآخر من الحلوى؟

A 12 **C** 60
B 35 **D** عدد لا نهائي

مراجعة تراكمية

أوجد الحد التالي في كل من المتتابعتين الآتيتين:

23) $3 , 12 , 48 , 192 , ...$ (الدرس 3-6)

24) $-10 , -6 , -2 , 2 , ...$ (الدرس 2-6)

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين (الدرس 6-5)

25) $1 + \frac{3}{x-1} = \frac{10}{7}$

26) $1 - \frac{3}{2x-1} = \frac{4}{3}$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-5)

27) $\frac{3^3}{3 \cdot 2}$

28) $\frac{2^4 \cdot 6}{8}$

29) $\frac{4^4 \cdot 3}{2 \cdot 4}$

7-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

فيما سبق:
درست استعمال مبدأ العد الأساسي.

والآن:
- أستعمل التباديل في حساب الاحتمال.
- أستعمل التوافيق في حساب الاحتمال.

المفردات:
التباديل
permutations
المضروب
factorial
التباديل الدائرية
circular permutation
التوافيق
combinations

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

وقف يوسف وعلي وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليسار ، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

الاحتمال باستعمال التباديل **التبديل** تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهمًا. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد، يوسف.
وباستعمال مبدأ العد الأساسي يوجد $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ ترتيبًا ممكنًا لهؤلاء الأصدقاء.
يمكن كتابة العبارة $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4 .

مفهوم أساسي — المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ ، ويُعرَف $0! = 1$

مثال 1 الاحتمال وتباديل n من العناصر

رياضة: نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. إذا كان عدد أعضاء الفريق 20 ويرتدي كلٌّ منهم قميصًا مرقمًا من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

الخطوة 1: أوجد عدد نواتج فضاء العيّنة. وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق العشرين ويساوي $20!$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحدث وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق المتبقية إذا كان رقم قميص نواف 1 ورقم قميص ماجد 2 و يساوي $18! = (20-2)!$

الخطوة 3: احسب الاحتمال

$$P(\text{نواف 1 و ماجد 2}) = \frac{18!}{20!}$$ ← عدد نواتج الحدث ، ← عدد النواتج الممكنة

$$= \frac{\cancel{18!}}{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}$$ بإيجاد مفكوك $20!$ والقسمة على العوامل المشتركة

$$= \frac{1}{380}$$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

1) **تصوير:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟

ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، وافرض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يتم اختيار 4 أشخاص فقط عشوائيًا ليظهروا في الصورة. وباستعمال مبدأ العد الأساسي فإن عدد تباديل 4 أصدقاء أُخذوا من مجموعة من 6 أصدقاء هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360 .

وهناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء إذا اختير 4 منهم في كل مرّة ويرمز إليها بالرمز $_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروب.

$$_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:

قراءة الرياضيات

متمايز يعني مصطلح عناصر متمايزة أن العناصر مختلفة بطريقة ما.

مفهوم أساسي — التباديل

أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد تباديل n من العناصر المتمايزة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nP_r$ حيث

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$$_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

مثال 2 الاحتمال والتباديل $_nP_r$

يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، ما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسًا، ونائبًا للرئيس، وأمينًا للسر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيًا؟

الخطوة 1: بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء مجلس الإدارة، فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جدًا. عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد تباديل 10 أعضاء أخذ منها 3 في كل مرة، أي $_{10}P_3$

$$_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

الخطوة 2: عدد نواتج الحدث يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيبًا واحدًا فقط للأعضاء الثلاثة في مراكزهم المعينة.

الخطوة 3: لذا، فإن احتمال اختيار فيصل ومحمد ومهند، يساوي $\frac{1}{720}$

إرشادات للدراسة

العشوائية عندما يتم اختيار النواتج عشوائيًا تتساوى فرص وقوعها، ويمكن حساب احتمالاتها باستعمال التباديل والتوافيق.

تحقق من فهمك

2) تستعمل الأرقام 9–1 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟

B) اختيرت بطاقة جامعية عشوائيًا، ما احتمال أن تحمل الرقم 42135976؟

تكرر في بعض الأحيان بعض العناصر، ولإيجاد عدد التباديل المتمايزة في هذه الحالة تستعمل الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — التباديل مع التكرار

أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المتمايزة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات و آخر r_2 من المرات وهكذا ...، فإنه يساوي

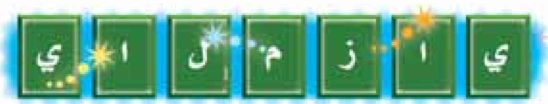
$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

الربط مع الحياة

أطول كلمة وردت في القرآن الكريم دون تكرار للحروف هي كلمة "فأسقيناكموه" من الآية 22 من سورة الحجر.

مثال 3 — الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفًا مبعثرة، ويطلب منه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكون اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلًا لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟



الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف ا مرتين، و الحرف ي مرتين. ولذا، فإن عدد التباديل المتمايزة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$ وذلك باستعمال الآلة الحاسبة

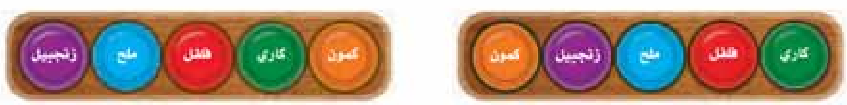
الخطوة 2: هناك ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي اسم ماليزيا.

الخطوة 3: احتمال أن يكون التبديل الذي تم اختياره عشوائيًّا يعطي اسم ماليزيا يساوي $\frac{1}{1260}$

تحقق من فهمك

3) **أرقام هواتف:** ما احتمال أن يكون 55652113 رقمًا لهاتف مكوّن من 8 أرقام هي 5, 1, 6, 5, 2, 1, 5, 3 ؟

ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليمين، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الكمون أولًا من اليمين بدلًا من الكاري . لذا، فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي !5 .



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى التراتيب الممكنة **تباديل دائرية** ، فإذا وضعتَ عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة باتجاه عقارب الساعة موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.

لذا فإن، تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي عندما توضع العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5-1)!$$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التباديل الدائرية

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة دون نقطة مرجع ثابتة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا رُتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجع ثابتة، فإن الترتيبات سُتعامل خطيًّا ويكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

مثال 4 الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، ووضح تبريرك.

a) زينة: **إذا رُتبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائيًا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟**

بما أنه لا توجد نقطة مرجع ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

لذا يوجد $(6-1)!$ أو $5!$ من التباديل المختلفة لهذه القطع. وعليه، فإن احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل هو $\frac{1}{5!}$ ويساوي $\frac{1}{120}$.

b) طعام: **جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟**

بما أن الأشخاص يجلسون حول المنضدة حسب نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل خطي. لذا يوجد $4!$ أو 24 طريقة يجلس بها الأشخاص، وعدد نواتج الحدث يساوي عدد تباديل الأشخاص الثلاثة الآخرين حيث سيجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجانب النافذة وهذا يساوي $3!$ أو 6 .

لذا، فإن احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة هو $\frac{3!}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

إرشادات للدراسة

قبل بدء إيجاد الاحتمال المطلوب، حدّد إذا كان ترتيب العناصر يتم وفق نقطة مرجع ثابتة أم لا.

تحقق من فهمك

4) **كرة قدم:** تجمّع فريق كرة قدم مكوّن من 11 لاعبًا على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة.

A) ما احتمال أن يقف قلب الهجوم إلى يمين حارس المرمى مباشرة، إذا تجمّع الفريق بشكل عشوائي؟ وضّح تبريرك.

B) إذا وقف حكم المباراة تمامًا خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضّح تبريرك.

الاحتمال باستعمال التوافيق **التوافيق** هي تنظيم العناصر حيث يكون الترتيب فيها غير مهم. افرض أنك تحتاج إلى اختيار موظفيْن من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظفيْن غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الموظفيْن.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التوافيق

بالرموز: **يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nC_r$ ، حيث** $_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

مثال: **عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:**

$$_8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot \cancel{6}} = 56$$

مثال 5 الاحتمال و $_nC_r$

كرة طائرة: يريد مدرِّب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟

الخطوة 1: بما أن ترتيب اختيار اللاعبين ليس مهمًّا، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد توافيق 10 مأخوذة 6 في كل مرة أي $_{10}C_6$

$$_{10}C_6 = \frac{10!}{(10-6)!\,6!} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{6!}} = 210$$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحدث، وفي هذه الحالة يساوي $_6C_6 = 1$، وهو اختيار اللاعبين الستة المذكورين، وترتيب اختيارهم ليس مهمًّا.

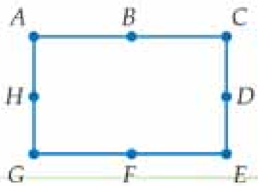
الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار اللاعبين الستة هو $\frac{_6C_6}{_{10}C_6} = \frac{1}{210}$

إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق
استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًا، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًا.

تحقق من فهمك

5) **هندسة:** إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟



تأكد

مثال 1

1) **هندسة:** إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صف من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلث هو الأول والمربع هو الثاني؟

مثال 2

2) **معرض علمي:** تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 15 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟

مثال 3

3) **أعداد:** يتكون عدد من الأرقام 5, 6, 6, 3, 3, 3, 1 . ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133 ؟

مثال 4

4) **كيمياء:** في معمل الكيمياء طُلب إليك اختيار ست عينات رتُبت عشوائيًا على منضدة دائرية.

a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟

b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في الوسط في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟

مثال 5

5) **مسابقات:** اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبدالعزيز وخالد وفوزي؟

تدرب وحل المسائل

مثال 1 **6) محاضرات:** ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كل منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟

7) حفلات: وزعت بطاقات مرقمة من 1 إلى 50 على 50 شخصًا في حفلة، وكان حسين وزياد من بين الحاضرين. ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 وزياد البطاقة رقم 23 ؟

مثال 2 **8) مجموعات:** تمّ اختيار شخصين عشوائيًّا من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أولًا ثم سليم ثانيًا؟

مثال 3 **9) أحرف ممغنطة:** اشترى عدنان أحرفًا ممغنطةً يمكن ترتيبها على باب ثلاجته بحيث تشكل كلمات معينة. إذا اختار عشوائيًّا تبديلًا من الأحرف المبينة في الشكل المجاور، فما احتمال أن تشكل هذه الأحرف كلمة "مكالمات"؟

10) رموز بريدية: ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 39372375 إذا تم تكوينه عشوائيًّا من الأرقام 3 ,7 ,3 ,9 ,5 ,7 ,2 ,3؟

مثال 4 **11) مجموعات:** يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي الأقرب إلى الباب؟

12) مدينة ألعاب: ذهب خليل وأصدقاؤه إلى مدينة ألعاب وقد اختاروا لعبة ذات مقاعد مرتبة في دائرة. إذا كان عدد المقاعد 8، فما احتمال أن يجلس خليل في المقعد الأبعد عن مدخل اللعبة؟

13) ألعاب: استعمل الشكل الآتي، مفترضًا أن الكرات رُتبت عشوائيًّا:

a) ما احتمال أن تكون الكرة 2 والكرة 11 هما الأولى والثانية من اليسار؟

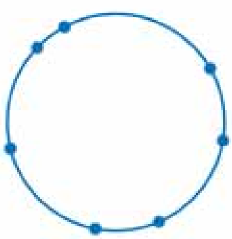
b) إذا خلطت الكرات الثماني عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون الترتيب كما هو مبيّن في الشكل أعلاه؟

c) إذا أُعيد ترتيب الكرات عشوائيًّا بحيث شكلت دائرة. فما احتمال أن تكون الكرة 6 إلى جانب الكرة 7؟

d) وضعت 7 كرات في صف؛ ثلاث منها أرقامها 8 ، وثلاث أرقامها 9، وكرة واحدة رقمها 6. ما احتمال أن تكون الكرات ذات الرقم 8 إلى يسار الكرة 6 ، والكرات ذات الرقم 9 عن يمينها؟

مثال 5 **14)** ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط لا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضّح إجابتك.

15) اختيرت 7 نقاط تقع على دائرة عشوائيًّا كما في الشكل المجاور.



a) إذا استعملت الأحرف من A إلى G، فما عدد الطرق التي يمكن أن تسمي بها النقاط على الدائرة؟

b) إذا أعطيت إحدى النقاط حرفًا معينًا، فما عدد الترتيبات الممكنة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

16) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم أنها غير صحيحة أبدًا ؟ برر إجابتك.
$${}_nP_r = {}_nC_r$$

17) **تحد:** يدّعي طالب أن العلاقة بين التباديل والتوافيق هي: ${}_nC_r = {}_nP_r \cdot r!$.
بيّن صحة هذه العلاقة جبريًّا، ثم وضّح لماذا يختلف ${}_nC_r$ و ${}_nP_r$ بعامل مقداره $r!$.

18) **مسألة مفتوحة:** صف وضعًا يكون فيه الاحتمال يساوي $\frac{1}{{}_7C_3}$.

19) **برهان:** برهن أن ${}_nC_{n-r} = {}_nC_r$.

20) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التباديل والتوافيق .

تدريب على اختبار

21) **احتمال:** يقف رجلان وولدان في صف واحد. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي؟

A $\frac{1}{24}$ **C** $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{1}{2}$

22) **إجابة قصيرة:** إذا اخترت عشوائيًّا تبديلًا للأحرف المبينة أدناه، فما احتمال أن تكون كلمة "فسيفساء"؟

ف ء س ف ي س ا

23) **احتمال:** ألقي مكعب مرقم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي في 9 مرات. إذا ألقي المكعب نفسه للمرة العاشرة، فما احتمال ظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟

A 1

B $\frac{9}{10}$

C $\frac{1}{6}$

D $\frac{1}{10}$

مراجعة تراكمية

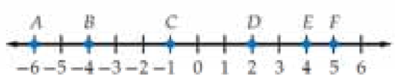
24) **تسوّق:** لدى محل تجاري أنواع من المعاطف النسائية بالمقاسات 4 أو 6 أو 8 أو 10 وذات ألوان متعددة منها الأسود، الأخضر، الأزرق، الأحمر . كم معطفًا مختلفًا يمكن اختياره؟ (الدرس 1-7)

مثّل فضاء العيّنة في كل تجربة مما يأتي بالرسم الشجري :

25) إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة الواحدة تلو الأخرى. (الدرس 1-7)

26) سحب كرتين معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء، 4 كرات بيضاء، و 3 كرات سوداء. (الدرس 1-7)

أوجد قياس كل مما يأتي مستعملاً خط الأعداد: (مهارة سابقة)



27) DF

28) AE

29) EF

30) BD

31) AC

32) CF

7-3

الاحتمال الهندسي
Geometric Probability

فيما سبق:
درست إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة.

والآن:
- أجد الاحتمالات باستعمال الطول.
- أجد الاحتمالات باستعمال المساحة.

المفردات:
الاحتمال الهندسي
geometric probability

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

في القرص ذي المؤشر الدوار المبين في الشكل، إذا تم تدوير المؤشر فإنه يستقر على أحد الألوان(الأزرق، الأحمر، الأخضر، الأصفر)، ويعاد تدوير المؤشر إن استقر على الخط الفاصل بين لونين.

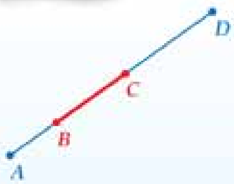
الاحتمال الهندسي احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الألوان يعتمد على مساحة ذلك اللون. ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسًا هندسيًا مثل الطول أو المساحة **احتمالًا هندسيًا**.

مفهوم أساسي — الاحتمال والطول

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$



مثال: إذا اختيرت النقطة E على $\overline{AD}$ عشوائيًا، فإن

$$P(\text{تقع } E \text{ على } \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

مثال 1 — استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.

$P(\text{تقع } X \text{ على } \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$ — احتمال الطول

$= \frac{7}{14}$ — $KL = 7 , JM = 3 + 7 + 4 = 14$

$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ — بالتبسيط

تحقق من فهمك

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

1A) $P(\text{تقع } X \text{ على } \overline{LM})$

1B) $P(\text{تقع } X \text{ على } \overline{KM})$

يمكن استعمال الاحتمال الهندسي في مواقف كثيرة من واقع الحياة تتضمن عددًا غير منتهٍ من النواتج.

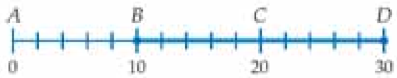
الربط مع الحياة

تمتاز الحافلات بانخفاض تكاليف تشغيلها، واتساعها لعدد أكبر من الركاب، وهي أكثر وسائل النقل أمانًا.

مثال 2 من واقع الحياة **نمذجة احتمالات من واقع الحياة**

مواصلات: **تصل حافلة ركاب إلى الموقف أو تغادره حافلة كل 30 دقيقة. إذا وصل راكب إلى المحطة، فما احتمال أن ينتظر 10 دقائق أو أكثر لركوب إحدى الحافلات؟**

يمكن تمثيل الموقف باستعمال خط الأعداد. بما أن الحافلات تصل كل 30 دقيقة، فإن الحافلة التالية تصل بعد 30 دقيقة أو أقل. وتمثل حادثة الانتظار 10 دقائق أو أكثر بالقطعة المستقيمة BD على خط الأعداد الآتي:



أوجد احتمال هذه الحادثة.

$P($انتظار 10 دقائق أو أكثر$) = \frac{BD}{AD} =$ احتمال الطول

$\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ $\quad BD = 20, AD = 30$

لذا، فاحتمال انتظار 10 دقائق أو أكثر لوصول الحافلة التالية يساوي $\frac{2}{3}$، أو 67% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) **شاي:** يحضّر مطعم الشاي في وعاء سعته 8L، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2L يصبح تركيز الشاي كبيرًا ويختلف طعمه.

A) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2L؟

B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أي وقت بين 2L و 3L؟

الاحتمال والمساحة تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضًا. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

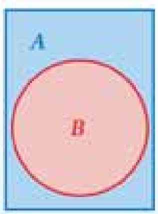
مفهوم أساسي **الاحتمال والمساحة** أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيًا، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$

مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا في المستطيل A، فإن

$P($وقوع النقطة E في الدائرة $B) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$



وعند تحديد الاحتمال الهندسي لهدفٍ ما نفترض الآتي:

- وقوع الهدف ضمن منطقة محددة.
- أن احتمال وقوع الهدف في أي مكان من المنطقة متساوٍ.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال المساحة لإيجاد الاحتمال الهندسي

الهبوط بالمظلات: **يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية 2 m ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 m، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟**

نجد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف الكلي، نصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m، بينما نصف قطر الهدف الكلي يساوي 1 + 1 + 1، أو 3 m .

$$P(\text{أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء}) = \frac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}}$$ احتمال المساحة

$$= \frac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2}$$ $A = \pi r^2$

$$= \frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9}$$ بالتبسيط

احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء هو $\frac{1}{9}$، ويساوي 11% تقريبًا.

الربط مع الحياة

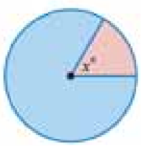
يهبط المظليون المحترفون المشاركون في بطولات الهبوط الحر بالمظلة على بعد أقل من بوصتين عن مركز مكان الهبوط.

✓ تحقق من فهمك

3) **الهبوط بالمظلات:** أوجد كلًّا مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.

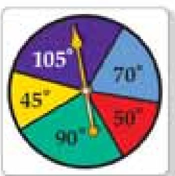
A) P(أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء)

B) P(أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء)



يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي.
إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية ($x°$) إلى $360°$. ستبرهن هذا في السؤال 21.

مثال 4 — استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي



استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي:

(علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)

a) **P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر)**

قياس زاوية القطاع الأصفر 45°

$P(\text{استقرار المؤشر على اللون الأصفر}) = \frac{45}{360} \approx 12.5\%$

b) **P(استقرار المؤشر على اللون البنفسجي)**

قياس زاوية القطاع البنفسجي 105°

$P(\text{استقرار المؤشر على اللون البنفسجي}) = \frac{105}{360} \approx 29\%$

c) **P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق)**

مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق $50° + 70° = 120°$

$P(\text{عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق}) = \frac{360 - 120}{360} = \frac{240}{360} \approx 67\%$

إرشادات للدراسة

استعمال التقدير

في المثال 4b، مساحة القطاع البنفسجي أقل قليلًا من $\frac{1}{3}$، أو 33% من القرص. لذا، فالجواب 29% يكون معقولًا.

✓ تحقق من فهمك

4A) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر) **4B)** P(استقرار المؤشر على اللون الأزرق)

تأكد

مثال 1 إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AD}$ فأوجد كلًّا مما يأتي:

1) $P($تقع X على $\overline{BD})$

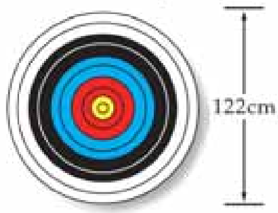
2) $P($تقع X على $\overline{BC})$

مثال 2

3) **بطاقات:** طبعت إدارة مدرسة بطاقات دعوة لحفل تخرج 20 طالبة مرقمة من 1 إلى 104 ، وأعطت كل طالبة 5 بطاقات. إذا لم تكن البطاقة رقم 104 مع الطالبة مروة، فما احتمال أن تكون مع زميلتها زينب، أو ضمن البطاقات التي لم توزع؟

المثالان 3, 4

4) **لعبة السهام:** يُسدد هدّاف سهمه نحو قرص قطره 122cm يحتوي على 10 دوائر متحدة المركز تتناقص أقطارها بمقدار 12.2cm كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الهدّاف نقطة داخل الدائرة الصغرى.



5) **ملاحة:** ضَلّ أحد طلبة الكشافة طريقه في غابة، فوجّه بوصلته عشوائيًّا. أوجد احتمال أن يوجه البوصلة باتجاه المنطقة المحصورة بين الشمال (N) والشمال الشرقي (NE).

تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا اختيرت النقطة X على $\overline{FK}$ عشوائيًّا، فأوجد كلًّا مما يأتي:

6) $P($تقع X على $\overline{FH})$

7) $P($تقع X على $\overline{GJ})$

8) $P($تقع X على $\overline{HK})$

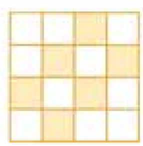
9) **طيور:** تقف أربعة طيور على سلك هاتف. فإذا هبط طائر خامس عشوائيًّا على نقطة من نقاط السلك بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟

مثال 2

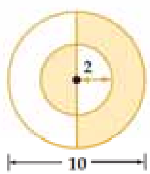
10) **تلفاز:** يُتابع عمّار برنامجًا تلفزيونيًّا مدته 30 دقيقة. إذا كان يُبث إعلان في التلفاز في وقت عشوائي مرّة كل فترة 3 ساعات. فما احتمال أن يشاهد عمّار الإعلان ثانية خلال متابعته لبرنامجه المفضّل الذي مدته 30 دقيقة في اليوم التالي؟

مثال 3 اختيرت نقطة عشوائيًّا في كل من الأشكال الآتية، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة.

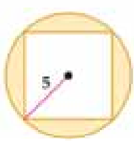
(11



(12



(13



مثال 4 استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار لإيجاد كل مما يأتي (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره):

14) P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر)

15) P(استقرار المؤشر على اللون الأزرق)

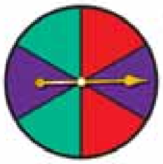
16) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)

17) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر ولا على اللون الأصفر)

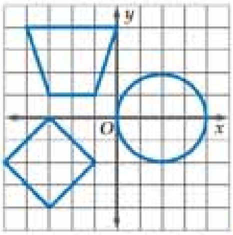
صف حدثًا يكون احتماله $\frac{1}{3}$ لكل من النماذج الآتية:

18)

19)



20) **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت نقطة عشوائيًا على الشبكة المجاورة، فأوجد كلًّا مما يأتي:

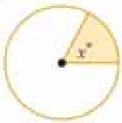


a) P(النقطة داخل الدائرة)

b) P(النقطة داخل شبه المنحرف)

c) P(النقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة)

21) **جبر:** اختيرت نقطة عشوائيًا في الدائرة. أثبت أن احتمال وقوعها في المنطقة المظللة يساوي $\frac{x}{360}$.

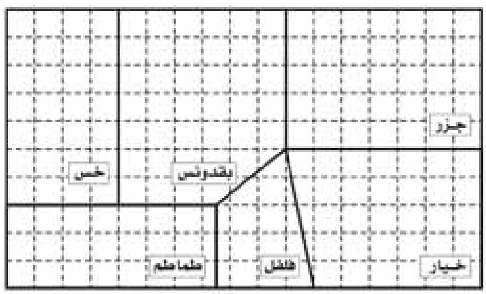


22) **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت عشوائيًا نقطة (x, y) في منطقة حل نظام المتباينات $1 \le x \le 6,\ y \le x,\ y \ge 1$، فما احتمال أن يكون $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$؟

23) **زراعة:** مزرعة مقسمة إلى حقول كما في الشكل المجاور.

a) ما المساحة الإجمالية لحقول الخيار والجزر.

b) إذا وقف مزارع في مكان من المزرعة عشوائيًا لجني المحصول، فما احتمال أن يكون قد وقف في حقل من حقول البقدونس.

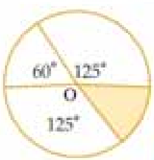


الربط مع الحياة

حققت التنمية الزراعية في المملكة العربية السعودية تطورًا كبيرًا في فترة وجيزة، مما أسهم في نقل البلاد من مرحلة استيراد معظم احتياجاتها الغذائية إلى مرحلة الاكتفاء الذاتي، وتصدير بعض المحاصيل.

مسائل مهارات التفكير العليا

24) **اكتشف الخطأ:** حسب كل من عمر وسالم احتمال وقوع النقطة التي يتم اختيارها عشوائيًا داخل الدائرة O في المنطقة المظلّلة. أيهما حله صحيح؟ وضّح تبريرك.



عمر

$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$

$= \frac{50}{360}$

$\approx 13.9\%$

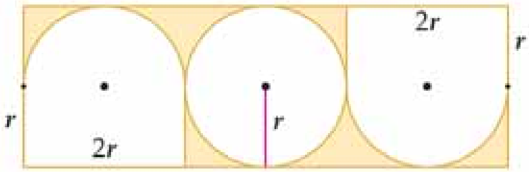
سالم

$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$

$= \frac{60}{360}$

$\approx 16.7\%$

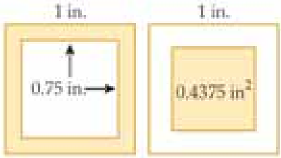
25) **تحدٍّ:** أوجد احتمال أن تقع نقطة يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الشكل المجاور في المنطقة المظللة مقربًا الناتج إلى أقرب عُشر.



26) **تبرير:** محيط مثلث متطابق الضلعين يساوي 32 cm. إذا كانت أطوال أضلاع المثلث أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحته $48\ cm^2$ بالضبط؟ وضّح تبريرك.

27) **مسألة مفتوحة:** مثّل حادثة احتمالها 20% باستعمال ثلاثة أشكال هندسية مختلفة.

28) **اكتب:** إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا في كل من المربعين الآتيين، فوضح لماذا يتساوى احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة في أي منهما.



تدريب على اختبار

29) **احتمال:** رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات، واختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المربع. ما احتمال أن تقع أيضًا داخل الدائرة؟

A $\frac{1}{9}$ **C** $\frac{1}{3}$

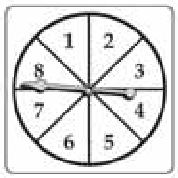
B $\frac{\pi}{9}$ **D** $\frac{9}{\pi}$

30) **احتمال:** يحتوي صندوق على 7 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، وكرتين بيضاوين و 3 كرات سوداء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائيًّا. فما احتمال أن تكون حمراء؟

A $\frac{1}{9}$ **C** $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{7}{18}$

31) **إجابة قصيرة:** قُسّم القرص الآتي إلى 8 قطاعات متساوية. وقد أدير المؤشر:



a) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد 3؟

b) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد فرديًّا؟

مراجعة تراكمية

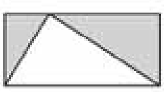
32) **حفلة:** يجلس خمسة أصدقاء حول منضدة دائرية الشكل في حجرة فيها نافذة واحدة، ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى النافذة؟ (الدرس 7-2)

مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري: (الدرس 7-1)

33) في كل من السنتين القادمتين يمكن لأحمد الاشتراك في النشاط الثقافي (C) أو النشاط العلمي (S).

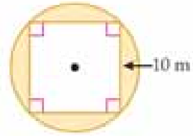
34) يمكن أن تشتري أمينة زوج أحذية له كعب مرتفع (H) أو كعب منخفض (L)، وبلون أسود (K) أو بني (B).

35) **هندسة:** في الشكل المجاور، ما نسبة المساحة المظللة إلى مساحة المستطيل؟ (مهارة سابقة)

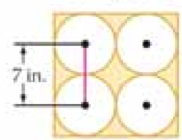


أوجد مساحة المنطقة المظلّلة في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

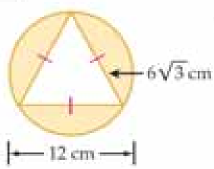
36)



37)



38)



1) **طعام:** يتكون غداء صالح من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب حسب الجدول الآتي:

شطائر	حساء	الحلوى	مشروبات
دجاج	دجاج	كعك	شاي
لحم	خضراوات	كنافة	قهوة
لبنة	عدس		عصير برتقال
جبنة			عصير تفاح
			حليب

a) ما عدد الوجبات المختلفة التي يمكن لصالح أن يتناولها إذا اختار صنفًا من كل عمود؟

b) إذا أضيف نوع واحد من الحساء ونوعين من الحلوى، فكم يصبح عدد الوجبات المختلفة؟

2) **أعداد:** كم عددًا مختلفًا مكونًا من (٥) أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام ٢، ٣، ٤، ...، ٩ دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

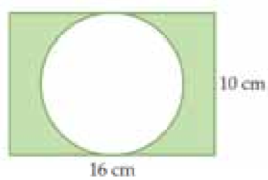
3) **ملابس:** في محل تجاري قمصان ألوانها: أحمر (R)، أزرق (B)، أصفر (Y)، أخضر (G)، زهري (P)، برتقالي (O)، وكل منها بنوعي أكمام: طويل (L) وقصير (S). مثّل فضاء العيّنة لخيارات القمصان لدى مريم إذا أرادت شراء قميص من المحل باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

4) **كتابة:** يحتوي كيس على بطاقات كُتب على كل واحدة منها حرف واحد من الحروف: ر ، ف ، س ، ة ، و ، ي. إذا اختير تبديل واحد من هذه الحروف عشوائيًا لتكوين كلمة، فما احتمال أن تكون الكلمة "فروسية"؟

5) **نقود:** لدى محمود 3 جيوب و 4 قطع نقدية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع القطع جميعها في جيوبه؟

6) **نقود:** إذا أُلقيتْ قطعة نقد عشر مرات متتالية، ما عدد النواتج التي تظهر فيها الصورة في الرمية الثالثة؟

7) إذا اختيرت نقطة عشوائيًا داخل المستطيل، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟



8) **سيرك:** مُد حبل طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرص قَطْع الحبل عند أي نقطة من نقاطه متساوية.

a) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل في أول 50 m منه.

b) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل من نقطة تقع ضمن مسافة 20 m من أي من العمودين.

اختيرت نقطة A عشوائيًا على $\overline{BE}$. أوجد كلًّا ممّا يأتي:

9) $P($تقع A على $\overline{CD})$

10) $P($تقع A على $\overline{BD})$

11) $P($تقع A على $\overline{CE})$

12) $P($تقع A على $\overline{DE})$

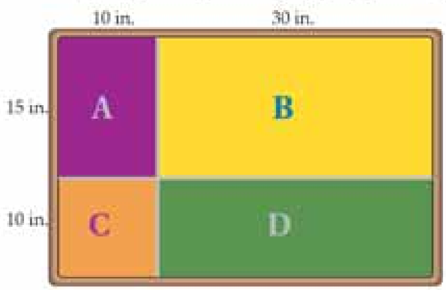
استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي: (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره مرة أخرى).

13) $P($استقرار المؤشر في المنطقة الصفراء$)$

14) $P($استقرار المؤشر في المنطقة الزرقاء$)$

15) $P($استقرار المؤشر في المنطقة الحمراء$)$

16) **ألعاب:** الهدف من لعبة رمي السهام أن يصيب السهم المنطقة مربعة الشكل C في اللوحة مستطيلة الشكل المبينة أدناه:



a) ما احتمال أن يصيب السهم المنطقة A؟

b) ما احتمال أن يصيب السهم المنطقة B؟

c) ما احتمال أن يصيب السهم المنطقة C؟

d) ما احتمال أن يصيب السهم المنطقة D؟

7-4

محاكاة مواقف واقعية
Simulations

فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات باستعمال قياسات هندسية (الطول، المساحة).

والآن:

- أصمم محاكاة لتقدير الاحتمالات.
- ألخص بيانات المحاكاة.

المفردات:

النموذج الاحتمالي
probability model

المحاكاة
simulation

المتغير العشوائي
random variable

القيمة المتوقعة
expected value

قانون الأعداد الكبيرة
Law of Large Numbers

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

بناءً على التدريب يعلم ياسر أنه يسجل 70% من رمياته الحرة أهدافًا في لعبة كرة السلة. ويرغب في استعمال هذه المعلومة للتنبؤ بعدد الرميات الحرة التي سيسجلها في المباريات القادمة.

تصميم المحاكاة **النموذج الاحتمالي** هو نموذج رياضي يُستعمل لتمثيل ظاهرة عشوائية. **المحاكاة** هي استعمال نموذج احتمالي لإعادة تكوين موقف مرة تلو الأخرى، بحيث يمكن تقدير احتمالات النواتج. ولتصميم محاكاة استعمل الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي — تصميم المحاكاة

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: حدّد كل ناتج ممكن وقيمة احتماله النظري.

الخطوة 2: اكتب الفرضيات الممكنة.

الخطوة 3: صف نموذجًا احتماليًا ملائمًا للموقف.

الخطوة 4: عرِّف المحاولة اللازمة لهذا الموقف، ثم حدد عدد المحاولات الواجب إجراؤها.

ويكون للنموذج الاحتمالي الملائم، الاحتمالات نفسها التي للموقف الذي تحاول التنبؤ به، والنماذج الهندسية هي نماذج احتمالية مألوفة.

مثال 1 تصميم محاكاة باستعمال نموذج هندسي

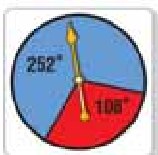
كرة سلة: بالعودة إلى فقرة "لماذا؟" أعلاه، صمِّم محاكاة يمكن استعمالها لتقدير احتمال أن يسجل ياسر من رميته الحرّة التالية.

الخطوة 1: النواتج الممكنة — الاحتمال النظري

- يسجل ياسر هدفًا في الرمية الحرّة. ← 70%
- يخطئ ياسر في الرمية الحرّة. ← $(100 - 70)\%$، أو 30%

الخطوة 2: نفرض أن المحاكاة مكوَّنة من 40 محاولة.

الخطوة 3: يمكن استعمال القرص ذي المؤشر الدوّار بحيث يقسم إلى قطاعين؛ أحدهما يشمل 70% من مساحة القرص، والآخر 30%. ولعمل ذلك أوجد قياس الزاوية المركزية لكل قطاع.



يسجل هدفًا في الرمية الحرّة	يخطئ في الرمية الحرّة
70% من 360° تساوي 252°	30% من 360° تساوي 108°

الخطوة 4: نجاح المحاولة يعني تسجيل هدف في الرمية الحرة، وفشلها يعني عدم التسجيل. وتتكون المحاكاة من 40 محاولة تمثل كل منها تدوير المؤشر مرة واحدة لكل رمية حرة، وعند إجراء 40 محاولة في هذه المحاكاة، يمكن التنبؤ بعدد الرميات الحرة التي سيسجلها ياسر.

تحقق من فهمك

1) **مطاعم:** يرفق مطعم إحدى قطع لعبة مجزّأة مع كأس العصير الكبيرة، ويمنح الشخص الذي يجمع قطع اللعبة الست جميعها جائزة. صمّم محاكاة مستعملًا نموذجًا هندسيًا يمكن استعماله لتقدير عدد كؤوس العصير الكبيرة التي يجب أن يشتريها شخص ليجمع قطع اللعبة جميعها.

إرشادات لحل المسألة

استعمال المحاكاة
غالبًا ما تقدم المحاكاة استراتيجية آمنة وفعّالة لحل المسألة في مواقف قد يكون تطبيقها مكلفًا أو خطرًا أو يستحيل حلها باستعمال أساليب نظرية. لذا، يجب أن تتضمن المحاكاة بيانات يسهل الحصول عليها أكثر من تلك البيانات الحقيقية التي تنمذجها.

إضافة إلى النماذج الهندسية، يمكن أن تنفذ المحاكاة باستعمال قطع النقود، أو المكعبات المرقمة، أو جداول الأعداد العشوائية، أو مولدات الأعداد العشوائية مثل تلك الموجودة في الحاسبة البيانية.

مثال 2 تصميم محاكاة باستعمال الأعداد العشوائية

لون العيون: **أظهرت نتائج مسح إحصائي أجري على طلاب مدرسة ثانوية أن 40% منهم عيونهم بنية، و 30% عيونهم عسلية، و 20% عيونهم خضراء، و 10% عيونهم زرقاء. صمّم محاكاة تستعمل لتقدير احتمال أن يكون لون عيني طالب اختير عشوائيًا من بين طلاب المدرسة هو أحد الألوان المذكورة.**

الخطوة 1:

النواتج الممكنة		الاحتمالات النظرية
عيون بنيّة	←	40%
عيون عسلية	←	30%
عيون خضراء	←	20%
عيون زرقاء	←	10%

الخطوة 2: افترض أن لون عيني أي طالب هو أحد الألوان المذكورة أعلاه.

الخطوة 3: استعمل مولّد الأعداد العشوائية في الحاسبة البيانية. وعيّن الأرقام العشرة 9–0 لتمثّل بيانات الاحتمالات بدقة. علمًا بأن اختيار الأرقام الفعلية التي تمثّل النواتج ليس مهمًا.

الناتج	تُمثَّل بـ
العيون البنيّة	0, 1, 2, 3
العيون العسلية	4, 5, 6
العيون الخضراء	7, 8
العيون الزرقاء	9

الخطوة 4: تمثّل المحاولة اختيار طالب عشوائيًا وتسجيل لون عينيه، ويمكن أن تكون المحاكاة من 20 محاولة.

إرشادات للدراسة

مولدات الأعداد العشوائية
لإيجاد أعداد عشوائية باستعمال الحاسبة البيانية اضغط على المفاتيح
1:New Document
1:Add Calculator
5:Probability
4:Random 2:Integer
ثم أدخل أول عدد وآخر عدد في المدى الذي اخترته، وعدد الأعداد الذي تريده في كل محاولة.

تحقق من فهمك

2) **كرة سلة:** سجّل إسماعيل في الموسم السابق 18% من رمياته الحرة أهدافًا. صمّم محاكاة تستعمل فيها مولّد الأعداد العشوائية في الحاسبة البيانية؛ لتقدير احتمال أن يسجل إسماعيل هدفًا في رميته الحرة التالية.

تلخيص البيانات من المحاكاة بعد تصميم عملية المحاكاة، يتعين عليك إجراء المحاكاة وتسجيل النتائج، ويتضمن ذلك كلًا من الملخصات البيانية والعددية لبيانات المحاكاة، بالإضافة إلى تقدير احتمال الناتج المطلوب.

مثال 3 تنفيذ المحاكاة وتلخيص بياناتها

كرة السلة، نفذ المحاكاة في المثال 1، وسجّل النتائج باستعمال ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

كوّن جدولًا تكراريًّا، وسجل النتائج بعد تدوير القرص 40 مرة.

الناتج	الإشارات	التكرار
يسجل هدفًا في الرمية الحرة	卌 卌 卌 卌 卌 |	26
يخطئ في الرمية الحرة	卌 卌 ||||	14
المجموع		40

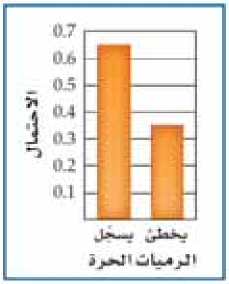
بناءً على بيانات الجدول احسب احتمال أن يسجل ياسر هدفًا في رميته الحرة التالية.

$$\frac{\text{عدد الرميات التي سجّل فيها أهدافًا}}{\text{عدد الرميات الحرة جميعها}} = \frac{26}{40} \text{ أو } 0.65$$

هذا احتمال تجريبي.

لذا فاحتمال تسجيل ياسر هدفًا في رميته الحرة التالية يساوي 0.65 أو 65%. لاحظ أن هذه النتيجة قريبة من الاحتمال النظري 70%. لذا فالاحتمال التجريبي لعدم تسجيل هدف في الرمية الحرة التالية يساوي $1 - 0.65$ أو 35% .

أنشئ أعمدة بيانية تمثل هذه النتائج.



تحقق من فهمك

3) **لون العيون،** استعمل الحاسبة البيانية ونفذ المحاكاة في المثال 2 . ثم سَجل النتائج باستعمال ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

المتغير العشوائي هو المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة. فمثلًا في تجربة رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة يمكن أن يُمثّل المتغير العشوائي X مجموع العددين الظاهرين على المكعبين، ويبين الجدول المجاور بعض قيم X المعيّنة لنواتج هذه التجربة.

مجموع نواتج رمي المكعبين المرقمين

النواتج	قيم X
(1, 1)	2
(1, 2)	3
(2, 1)	3
(4, 5)	9
(6, 6)	12

مراجعة المفردات

الاحتمال التجريبي هو ما يحدث فعلًا عند إجراء تجربة احتمالية.

والاحتمال النظري هو ما يجب أن يحدث إذا أجريت تجربة احتمالية.

القيمة المتوقعة، وتُعرف أيضًا بالتوقع الرياضي، وهي معدل قيم المتغير العشوائي المتوقعة عند إعادة التجربة أو محاكاتها نظريًّا عددًا لانهائيًّا من المرات. ولإيجاد القيمة المتوقعة $E(X)$ للمتغير العشوائي X، استعمل الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي حساب القيمة المتوقعة

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1، اضرب قيمة X في احتمال حدوثها.

الخطوة 2، كرر الخطوة 1 لجميع قيم X الممكنة.

الخطوة 3، أوجد مجموع نواتج الضرب.

بما أن القيمة المتوقعة معدل، فليس ضروريًّا أن تساوي إحدى قيم X المعيّنة لنواتج التجربة.

مثال 4 حساب القيمة المتوقعة

رمي السهام: افرض أنه قُذف سهم نحو قرص دائري، نصف قطر دائرة مركزه يساوي 1 cm و يزيد نصف قطر كل دائرة من الدوائر التالية 4 cm على نصف قطر الدائرة السابقة لها، وعدد النقاط المحددة لكل منطقة مبينة في الشكل المجاور.

a) إذا كان المتغير العشوائي Y يمثل عدد النقاط المحددة للمنطقة على لوحة السهام، فاحسب القيمة المتوقعة $E(Y)$ لكل رمية.

أولاً: احسب الاحتمال الهندسي لإصابة السهم لكل منطقة.

$$P(\text{المنطقة }1) = \frac{\pi(4+13)^2 - \pi(13)^2}{\pi(17)^2} = \frac{120}{289} \qquad P(\text{المنطقة }2) = \frac{\pi(4+9)^2 - \pi(9)^2}{\pi(17)^2} = \frac{88}{289}$$

$$P(\text{المنطقة }3) = \frac{\pi(4+5)^2 - \pi(5)^2}{\pi(17)^2} = \frac{56}{289} \qquad P(\text{المنطقة }4) = \frac{\pi(4+1)^2 - \pi(1)^2}{\pi(17)^2} = \frac{24}{289}$$

$$P(\text{المنطقة }5) = \frac{\pi(1)^2}{\pi(1+4+4+4+4)^2} = \frac{1}{289}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{120}{289} + 2 \cdot \frac{88}{289} + 3 \cdot \frac{56}{289} + 4 \cdot \frac{24}{289} + 5 \cdot \frac{1}{289}$$

$$E(Y) \approx 1.96$$

لذا، فالقيمة المتوقعة لكل رمية هي 1.96 تقريبًا

b) صمّم محاكاة لتقدير معدل القيم أو معدل نتائج المحاكاة التي أعددتها للعبة. ثم قارن هذه القيمة بالقيمة المتوقعة التي وجدتها في الجزء **a**.

عيّن الأعداد الصحيحة من 1 إلى 289 لتمثل بيانات الاحتمالات بصورة دقيقة.

المنطقة 1 = الأعداد من 1 إلى 120

المنطقة 2 = الأعداد من 121 إلى 208

المنطقة 3 = الأعداد من 209 إلى 264

المنطقة 4 = الأعداد من 265 إلى 288

المنطقة 5 = العدد 289

استعمل الحاسبة البيانية لإنتاج 50 محاولة عشوائية للأعداد من 1 إلى 289. وسجّل النتائج في جدول تكراري، ثم احسب معدل قيم النواتج.

النواتج	التكرارات
المنطقة 1	16
المنطقة 2	13
المنطقة 3	13
المنطقة 4	8
المنطقة 5	0

ويكون معدل القيم هو:

$$1 \cdot \frac{16}{50} + 2 \cdot \frac{13}{50} + 3 \cdot \frac{13}{50} + 4 \cdot \frac{8}{50} + 5 \cdot \frac{0}{50} = 2.26$$

معدل القيم 2.26 وهو أكبر من القيمة المتوقعة 1.96

تحقق من فهمك

4) مكعبان مرقمان: افرض أن المتغير العشوائي X يمثّل مجموع العددين الظاهرين على مكعبين مرقمين متمايزين عند إلقائهما مرة واحدة.

A) أوجد القيمة المتوقعة $E(X)$.

B) صمّم محاكاة لتقدير معدل القيم لهذه التجربة ونفذها، ثم قارن هذه القيمة بالقيمة المتوقعة التي وجدتها في الجزء **A**؟

الفرق بين معدل القيم الناتجة في المحاكاة والقيمة المتوقعة نظريًّا في المثال 4 يوضّح **قانون الأعداد الكبيرة** (Law of Large numbers)، فكلّما ازداد عدد المحاولات العشوائية اقتربت قيمة معدل القيم الناتجة عن المحاكاة من القيمة المتوقعة نظريًّا.

إرشادات للدراسة

الاحتمال الهندسي

تذكّر عند إيجاد الاحتمالات الهندسية في لعبة رمي السهام أننا نفترض أن السهم يستقر داخل منطقة الهدف، وأن احتمالات استقراره في أي مكان في منطقة الهدف متساوية.

تاريخ الرياضيات

جاكوب بيرنولي
(1654–1705)

اكتشف الرياضي السويسري بيرنولي أنه كلما زاد عدد المشاهدات لموقف ما، كان توقع نتائج المستقبل أفضل.

وقد قدّم برهانًا علميًا لقانون الأعداد الكبيرة في كتابه «فن الحدس» (Art of conjecturing) المنشور سنة 1713م.

تأكد

المثالان 1، 3

1) **درجات طلاب:** حصلت رباب على تقدير ممتاز في 80% من اختبارات الرياضيات للفصل الأول. صمّمْ محاكاة باستعمال نموذج هندسي لتقدير احتمال حصولها على تقدير ممتاز في اختبار الرياضيات في الفصل الثاني ونفذها. وسجل النتائج باستعمال ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

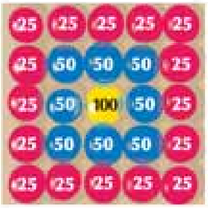
المثالان 2، 3

2) **رياضة:** يوضح الجدول المجاور النسبة المئوية للأعضاء المشاركين في أربعة أنواع من الرياضة في أحد النوادي. صمّمْ محاكاة لتقدير احتمال أن يمارس منتسب جديد للنادي كل نوع من أنواع الرياضة الأربعة، ونفذها، وسجلّ النتائج باستعمال ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

نوع الرياضة	النسبة المئوية
تايكوندو	45%
يوجا	30%
سباحة	15%
ملاكمة	10%

مثال 4

3) **مهرجان ألعاب:** تهدف اللعبة المجاورة إلى جمع نقاط باستعمال السهم لفرقعة البالونات بافتراض أن كل سهم يصيب بالونًا.



a) احسب القيمة المتوقعة لكل رمية سهم.

b) صمّم محاكاة، ثم قدّر معدل القيم لهذه اللعبة.

c) قارن بين معدل القيم والقيمة المتوقعة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1، 3

صمّم محاكاة لكل من السؤالين 5 ، 4 باستعمال نموذج احتمال هندسي ونفذها، ثم سجّل النتائج مستعملًا ملخصات عددية وبيانية ملائمة:

4) **ألعاب:** يعمل حمد في محل لبيع الألعاب، وقد باع منها في العام الماضي 95% .

5) تستمع منى إلى سور من القرآن الكريم مسجلة على شريط يحوي 10 سور تُختار عشوائيًا.

المثالان 2، 3

صمّم محاكاة لكل من الأسئلة 8-6 باستعمال مولّد الأعداد العشوائية في الحاسبة البيانية ونفذها، ثم سجل النتائج مستعملًا ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

6) **كتب:** راجع مدير مركز بيع كتب مبيعاته في السنة الماضية ليحدد أي الأنواع كانت أكثر بيعًا، فجاءت النتائج كما في الجدول المجاور.

النوع	نسبة البيع %
الروايات	40%
الخيال العلمي	30%
الفكاهة	25%
المغامرات	5%

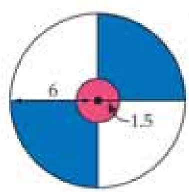
7) **إجازات:** بناءً على مسح قامت به وكالة سفريات فإن 45% من الزبائن قضوا إجازاتهم في أوروبا، و25% في آسيا، و 15% في أمريكا، و 10% في أفريقيا، و 5% في أستراليا.

مثال 4

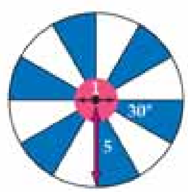
8) **سيارات:** أشارت نتائج دراسة تحليلية لإحدى شركات بيع السيارات إلى أن 35% من الزبائن اشتروا سيارات بيضاء، و 30% سيارات سوداء، و 15% سيارات زرقاء، و 15% سيارات حمراء، و 5% اشتروا سيارات ذات ألوان أخرى.

لعبة السهام: أبعاد أقراص لعبة السهام الآتية معطاة بالبوصات. إذا رُميتْ رمية واحدة على كل قرص منها، فاحسب القيمة المتوقعة لكل لعبة، ثم صمّم محاكاة لتقدير معدل القيم، وقارن بين معدل القيم للمحاكاة والقيمة المتوقعة لكل منها.

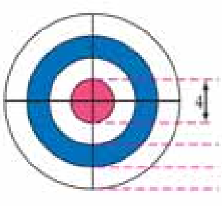
9)



10)



11)



■ = 25 نقطة　□ = 50 نقطة　■ = 100 نقطة

12) **ألعاب:** تهدف اللعبة المجاورة إلى تسجيل نقاط بدحرجة كرة لتستقر على مستوى مائل مقسم إلى مناطق ذات قيم مختلفة. واحتمال أن يحصل حسن على 100 نقطة في رمية واحدة 20%، وعلى 200 نقطة 55%، وعلى 300 نقطة 20%، وعلى 400 نقطة 5% .

a) احسب القيمة المتوقَّعة لكل رمية.

b) صمّمْ محاكاة، ثم قدّر معدل القيم الذي يحصل عليه حسن في هذه اللعبة.

c) قارن بين القيم في الفرعين **a** و **b**

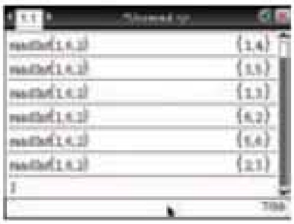
13) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي القيمة المتوقعة.

a) **حسيًا:** ارمِ مكعبين مرقمين متمايزين 20 مرة، وسجِّل مجموع العددين الظاهرين في كل رمية.

b) **عدديًا:** استعمل مولِّد الأعداد العشوائية في الحاسبة البيانية لإيجاد 20 زوجًا من الأعداد من 1 إلى 6، وأوجد مجموع كل زوج.

c) **جدوليًا:** انقل الجدول الآتي وأكمله مدوّنًا نتائجك من الفرعين **a** و **b**

التجربة	مجموع الرقمين في كل رمية	مجموع كل زوج من مولد الأعداد العشوائية
1		
2		
...		
20		



d) **بيانيًا:** مثّل عدد مرات تكرار المجاميع الناتجة من الرميات الخمس الأولى بالأعمدة البيانية، ثم كرِّر العملية لنواتج أول 10 رميات، ثم لنواتج 20 رمية.

e) **لفظيًا:** كيف يتغير شكل الأعمدة مع زيادة عدد المحاولات؟

f) **بيانيًا:** مثّل عدد مرات ظهور كل مجموع من مولّد الأعداد العشوائية بالأعمدة البيانية.

g) **لفظيًا:** قارن بين شكلي التمثيل البياني لتجربة رمي المكعبين ومحاولات الأعداد العشوائية.

h) **تحليليًا:** ما القيمة المتوقَّعة لكل تجربة بناءً على التمثيلات البيانية؟ وضّح تبريرك.

الربط مع الحياة

تفيد الأعداد العشوائية في الحاسوب في تطبيقات مختلفة مثل: برمجة ألعاب الفيديو المتحركة، أو نظام اختيار الأناشيد بشكل عشوائي، ... إلخ

مسائل مهارات التفكير العليا

14) **تبرير:** هل يمكن استعمال تجربة القرص ذي المؤشر الدوّار المجاور؛ لتصميم محاكاة للتنبؤ باحتمال الناتج C في تجربة ذات ثلاثة نواتج متساوية الاحتمال A, B, C؟ وضّح تبريرك.

15) **تبرير،** هل يمكن استعمال تجربة رمي قطعة نقد لمحاكاة تجربة ذات ناتجين: دائمًا، أم أحيانًا، أم لا يمكن أبدًا؟ برر إجابتك.

16) **تحدٍّ،** في إحدى التجارب، رميت خمس قطع نقدية في وقت واحد.

a) صمّم محاكاة يمكن استعمالها للتنبؤ باحتمال ظهور كتابة على 3 قطع منها بالضبط.

b) هل يمكن استعمال المحاكاة نفسها للتنبؤ باحتمال ظهور كتابة على ثلاث قطع على الأقل؟ وضّح تبريرك.

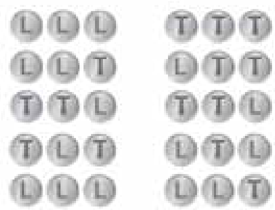
c) نفّذ المحاكاة. ما الاحتمال التجريبي لظهور كتابة على ثلاث قطع بالضبط؟

17) **مسألة مفتوحة،** صف تجربة لا تكون فيها القيمة المتوقعة ناتجًا محتملًا، وبرر إجابتك.

18) **اكتب،** لخّص عملية تصميم المحاكاة وتنفيذها.

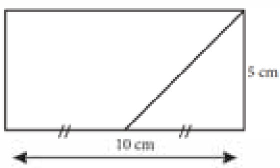
تدريب على اختبار

19) **احتمال،** رمت فائقة ثلاث قطع نقدية في الوقت نفسه، ثم كررت التجربة 9 مرات أخرى، وكانت النتائج كما هي مدوّنة أدناه؛ حيث تمثل L ظهور الشعار، وتمثل T ظهور الكتابة. بناءً على هذه البيانات، ما احتمال ظهور الشعار على واحدة على الأقل من هذه القطع الثلاث؟



A 0.1 B 0.2 C 0.3 D 0.9

20) **احتمال هندسي،** إذا اخترت نقطة داخل المستطيل الآتي عشوائيًّا، فما احتمال أن تقع داخل شبه المنحرف؟



A 7.5%

B 15%

C 25%

D 75%

مراجعة تراكمية

إذا اخترت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{QT}$، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 3-7)

21) $P($تقع X على $\overline{QS})$

22) $P($تقع X على $\overline{RT})$

23) **كتب،** تريد فوزية أن تختار 3 كتب من بين 10 كتب في المكتبة. ما احتمال أن تختار 3 كتب محددة من بين الكتب العشرة؟ (الدرس 2-7)

24) **ترفيه،** سئل 150 طالبًا عما يرغبون عمله في أوقات فراغهم، وتم تمثيل النتائج بأشكال ڤن كما في الشكل المجاور. (مهارة سابقة)

a) ما عدد الطلاب الذين يرغبون في الرحلات أو التسوّق؟

b) ما النشاط الذي اختاره 37 طالبًا؟

c) ما عدد الطلاب الذين لم يختاروا الرحلات؟

7-5

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة
Probabilities of Independent and Dependent Events

فيما سبق:

درست حساب الاحتمالات البسيطة.

والآن:

- أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.
- أجد احتمال حادثة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.

المفردات:

الحادثة المركبة
compound event

الحوادث المستقلة
independent events

الحوادث غير المستقلة
dependent events

الاحتمال المشروط
conditional probability

شجرة الاحتمال
probability tree

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يسحب معلم الكيمياء عشوائيًا بطاقات من صندوق فيه أسماء طلاب صفه البالغ عددهم 18 طالبًا، ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

تتكون **الحادثة المركبة** من حادثتين بسيطتين أو أكثر. وفي فقرة "لماذا ؟" أعلاه فإن اختيار سعود وفيصل لتقديم عرضيهما أولًا يُمثل حادثة مركبة؛ لأنها تتكون من حادثة اختيار سعود وحادثة اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الحوادث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.
- تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقةٍ ما احتمال حدوث B.

افرض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث غير مستقلة.

إرشادات للدراسة

الحادثة البسيطة

هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما. فمثلًا عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة، فإن الحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلًا هي حادثة بسيطة.

مثال 1 تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كل مما يأتي، ووضّح إجابتك:

a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.

إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الأولى لا يؤثر بأي حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الثانية، ولذا ؛ تكون الحادثتان مستقلتين.

b) في فقرة "لماذا ؟" أعلاه، اختير اسم أحد الطلبة عشوائيًا دون إرجاع، ثم اختير اسم طالب آخر.

بعد اختيار اسم الطالب الأول لا يعاد ولا يتم اختياره ثانية. فهذا يؤثر في احتمال اختيار اسم الطالب الثاني؛ لأن عدد عناصر فضاء العيّنة قد نقص واحدًا. لذا؛ فإن الحادثتين غير مستقلتين.

c) سحب كرة واحدة عشوائيًا من كلا صندوقين مختلفين.

احتمال نتيجة السحب من الصندوق الأول ليس لها تأثير في احتمال نتيجة السحب من الصندوق الثاني. لذا ؛ تكون الحادثتان مستقلتين.

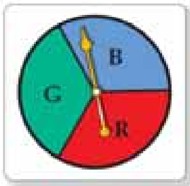
تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كل مما يأتي، ووضّح إجابتك:

1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سحبت بطاقة ثانية.

1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضًا.

إذا ألقيت قطعة نقد وأدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العيِّنة لهذه التجربة هو: {(L, B), (L, R), (L, G), (T, B), (T, R), (T, G)}.



باستعمال فضاء العيِّنة، فإن احتمال الحادثة المركبة ظهور الشعار على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي: $P(L \text{ و } G) = \frac{1}{6}$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحادثتين البسيطتين.

$$P(L) = \frac{1}{2} \qquad P(G) = \frac{1}{3} \qquad P(L \text{ و } G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

وهذا المثال يوضّح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$

يمكن تعميم هذا القانون على أيّ عدد من الحوادث المستقلة

قراءة الرياضيات

(و) يدل هذا الحرف على وقوع الحادثتين معًا، ويشير إلى ضرب الاحتمالات. وتقرأ العبارة $P(A \text{ و } B)$، احتمال وقوع A ووقوع B.

مثال 2 من واقع الحياة — احتمالات الحوادث المستقلة

وسائل النقل يرغب خالد وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في السيارة، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في الحافلة.

افرض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة ، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

هاتان حادثتان مستقلتان؛ لأن خالدًا أعاد القصاصة التي سحبها أولاً. افرض أن B يمثّل سحب قصاصة زرقاء وأن Y يمثّل سحب قصاصة صفراء، فيكون المطلوب هو $P(B \text{ و } B)$.

$$P(B \text{ و } B) = \underbrace{P(B)}_{\text{السحب 1}} \cdot \underbrace{P(B)}_{\text{السحب 2}} \quad \text{احتمال الحادثتين المستقلتين}$$

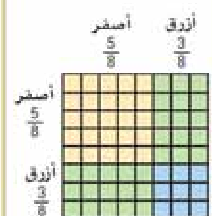
$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64} \quad P(B) = \frac{3}{8}$$

لذا؛ فاحتمال أن يسحب خالد قصاصتين زرقاوين يساوي $\frac{9}{64}$ أو 14% تقريباً.

إرشادات للدراسة

استعمال نموذج المساحة

يمكنك استعمال نموذج المساحة المبين أدناه لحساب احتمال أن تكون القصاصتان زرقاوين. حيث تمثل المنطقة الزرقاء احتمال سحب قصاصتين زرقاوين على التوالي. ومساحة هذه المنطقة تساوي $\frac{9}{64}$ من مساحة النموذج الكلي.



تحقق من فهمك

2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقم مرة واحدة. فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6 ؟

2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات (احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا)

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين غير مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث غير المستقلة.

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولاً، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**.

مثال 3 احتمالات الحوادث غير المستقلة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افرض أن خالدًا سحب قصاصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قصاصة، فما احتمال أن يسحب كل من الصديقين قصاصة صفراء؟

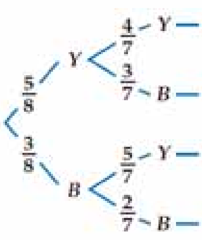
هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن خالدًا لم يُرجع القصاصة التي سحبها من الكيس.

$P(Y \text{ و } Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$ احتمال الحادثتين غير المستقلتين

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$ بعد سحب قصاصة صفراء، يبقى 7 قصاصات، أربع منها صفراء

لذا، فاحتمال أن يسحب الصديقان قصاصتين صفراوين يساوي $\frac{5}{14}$، أو 36% تقريبًا.

تحقق يمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات. وتُسمى **شجرة الاحتمال**. ولتوضيح هذه النتيجة. احسب احتمال كل حادثة بسيطة في المرحلة الأولى والاحتمال المشروط في المرحلة الثانية، ثم اضرب على طول كل فرع من الشجرة لإيجاد احتمال كل ناتج.



$P(Y \text{ و } Y) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$

$P(Y \text{ و } B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

$P(B \text{ و } Y) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

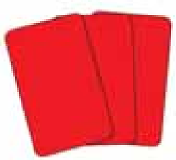
$P(B \text{ و } B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$

يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1

$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1$ ✓

تحقق من فهمك

3) يحتوي صندوق على 52 بطاقة، منها 13 بطاقة زرقاء مرقمة من 1 إلى 13 وبالمثل 13 بطاقة حمراء و 13 صفراء و13 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟



الاحتمال المشروط علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين أو أكثر، يمكن استعمالها أيضًا عند معرفة معلومات إضافية عن حادثة.

إذا رُمي مكعب مرقم مرة واحدة وعُلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5 ؟

هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه المكعب. لذا؛ سوف يختزل فضاء العيّنة من {1, 2, 3, 4, 5, 6} إلى {1, 3, 5}، وعليه، فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي:

$P(5 \mid \text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$.

تنبيه

إشارة الاحتمال المشروط يجب ألا يفسر الرمز " | " في $P(B|A)$ على أنه رمز القسمة.

إرشادات للدراسة

- لأي حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \le P(X) \le 1$
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1.

مثال 4 على اختبار

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1 إلى 8 عشوائيًّا حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.
- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.

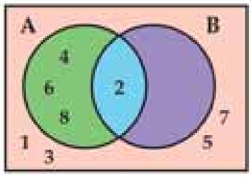
إذا كانت ليلى من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{1}{2}$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن ليلى من الفريق الثاني فإنها تكون قد سحبت عددًا زوجيًّا. لذا؛ فإنك بحاجة إلى إيجاد احتمال أن يكون الناتج 2 إذا علمت أن العدد المسحوب كان زوجيًّا. وعليه فإن هذه مسألة احتمال مشروط.

حل فقرة الاختبار



افرض أن A حادثة سحب عدد زوجي، وأن B حادثة سحب العدد 2

ارسم شكل ڤن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية في فضاء العيِّنة، وواحد منها هو 2

لذا؛ فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. والإجابة الصحيحة هي B

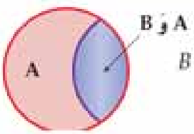
تحقق من فهمك

4) عند رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{2}$

بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العيِّنة، فيمكن تبسيط أشكال ڤن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين النواتج المشتركة في A و B

وهذا يعني أن $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$



مفهوم أساسي — الاحتمال المشروط

أضف إلى مطويتك

الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$

قراءة الرياضيات

الاحتمال المشروط $P(5|A)$ تقرأ احتمال أن يكون العدد الناتج 5 إذا وقعت الحادثة A.

إرشادات للاختبار

أشكال ڤن استعمل أشكال ڤن لتساعدك على تصور العلاقة بين نواتج حادثتين.

تأكد

مثال 1 حدِّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1، 2) مستقلتين أم غير مستقلتين، ووضِّح إجابتك:

1) وصل فريق مدرسة في كرة السلة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في مباراة البطولة.

2) نجاح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس.

مثال 2

3) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من الصندوق، ثم أعيدت إليه، وبعد ذلك سحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقتين إحداهما حمراء تحمل الرقم 5، والأخرى سوداء تحمل الرقم 4؟

مثال 3 (4 **وسائل نقل:** يريد عبد السلام شراء سلعة ثمنها 20 ريالًا. فإذا كان في جيبه 3 أوراق نقدية من فئة 5 ريالات، و7 أوراق من فئة 10 ريالات، فأوجد احتمال أن يسحب عشوائيًا ورقتين على التوالي من فئة 5 ريالات على فرض أن فرص حصول الحوادث متساوية.

مثال 4 (5 **أصدقاء:** يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1 إلى 10 عشوائيًّا، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **حدّد إذا كانت الحادثتان في الأسئلة (6-9) مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال:**

(6 رمي مكعب مرقم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسّم إلى قطاعات متطابقة، ومرقّم من 1 إلى 5؛ للحصول على عدد فردي.

(7 تكرار ظهور الرقم 1 في تجربة سحب بطاقتين متتاليتين عشوائيًا دون إرجاع، من صندوق يحتوي على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها أحد الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأزرق، وكل لون مرقم من 1 إلى 13.

(8 تكرار خروج كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائيًا دون إرجاع ، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و 4 كرات زرقاء.

(9 ظهور العدد 5 على الوجهين العلويين لمكعبين مرقمين متمايزين ألقيا مرة واحدة.

(10 **ألعاب:** أدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وأُلقيت قطعة نقد مرة واحدة. ما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟

(11 **شعارات:** معتمدًا على الجدول المجاور، إذا اختير شعاران عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون كلا الشعارين الأول والثاني أحمر؟

لون الشعار	العدد
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

مثال 4 (12 سُحبت كرة حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على كرتين زرقاوين و 9 حمراء دون إرجاع. ما احتمال سحب كرة حمراء ثانية؟

(13 مستطيل محيطه 12 وحدة، إذا كانت أطوال أضلاعه أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن يكون الشكل مربّعًا؟

(14 رُقمت قطاعات متطابقة في قرص من 1 إلى 12، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 11 إذا عُلم أنه استقر عند عدد فردي؟

(15 **تقنيات:** يمتلك 43% من طلاب مدرسة جهازًا نقالًا، و 28% يمتلكون جهازًا نقالًا وجهاز حاسوب. فما احتمال أن يمتلك طالب منهم جهاز حاسوب إذا كان يمتلك جهازًا نقالًا؟

(16 **برهان:** استعمل قانون احتمال حادثتين غير مستقلتين $P(A \text{ و } B)$ لاشتقاق قانون الاحتمال المشروط $P(B|A)$

(17 **تنس أرضي:** إذا كانت نسبة أداء الضربة الأولى دون أخطاء للاعب تنس 40% ، على حين كانت نسبة الضربة الثانية 70%

a) ارسم شجرة الاحتمال التي تبيّن احتمالات النواتج.

b) ما احتمال أن يرتكب اللاعب خطأً مزدوجًا؟

الربط مع الحياة

تُعد ضربة البداية في التنس الأرضي خطأً مزدوجًا على اللاعب إذا لم ينجح في إيصال الكرة إلى منطقة الاستقبال المقابلة دون أن يطأ خط الرمي أو يتجاوزه في محاولتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **اكتشف الخطأ:** أراد كل من مهند وجابر إيجاد احتمال A شرط وقوع B، حيث $P(A) = 0.3, P(B) = 0.3$، والحادثتان A و B مستقلتان. أيهما إجابته صحيحة؟ برر إجابتك.

جابر	مهند
بما أننا لا نعرف $P(A$ و $B)$، فلا نستطيع إيجاد $P(A\|B)$	بما أن A و B حادثتان مستقلتان، فإن: $P(A\|B) = P(A)$

19) **تحدٍّ:** يحتوي كيس على n من العناصر المختلفة، فإذا كان احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون إرجاع يساوي 2.4%. فما قيمة n؟ وضح إجابتك.

20) **تبرير:** إذا كان A و B حادثتين مستقلتين. فهل العبارة $P(A$ و $B) = P(B$ و $A)$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ برر إجابتك.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين مستقلتين وحادثتين غير مستقلتين، وبرر إجابتك.

22) **اكتب:** وضحّ لماذا يجب أن يكون مجموع احتمالات النواتج في شجرة الاحتمال يساوي 1.

تدريب على اختبار

23) **احتمال:** يمكن أن يلعب بلال عشوائيًا في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟

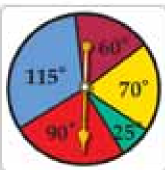
A $\frac{1}{18}$ B $\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{2}$

24) **احتمال:** يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ نور حبتي حلوى من الكيس دون أن ينظر إليهما. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشر.

مراجعة تراكمية

25) سجّل أيمن 90% من الرميات الحرة في كرة السلة خلال الموسم الأخير. صممّ محاكاة لتقدير احتمال أن يسجل الرمية التالية في هذا الموسم ونفذها. (الدرس 7-4)

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي (يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على أي خط بين لونين): (الدرس 7-3)



26) P(استقرار المؤشر عند اللون الأحمر)

27) P(استقرار المؤشر عند اللون الأزرق)

28) P(استقرار المؤشر عند اللون الأخضر)

29) P(استقرار المؤشر عند اللون الأصفر)

أوجد عدد النواتج الممكنة لكل موقف فيما يأتي: (الدرس 7-1)

30) تختار فاطمة واحدًا من بين 5 مذاقات مختلفة من الآيسكريم و 3 أنواع مختلفة من الحلوى.

31) يختار بدر واحدًا من الألوان الستة لدراجته الجديدة، وأحد تصميمين لمقاعدها.

32) رمي ثلاثة مكعبات مرقمة في آنٍ واحد.

7-6

احتمالات الحوادث المتنافية
Probabilities of Mutually Exclusive Events

فيما سبق:
درست إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

والآن:
- أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.
- أجد احتمال متممة حادثة.

المفردات:
الحوادث المتنافية
mutually exclusive events
الحادثة المتممة
complement event

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يمكن لأي طالب في الصفوف الأول والثاني والثالث الثانوي الترشح ليكون مسؤول أنشطة. ويرغب صالح في أن يكون المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي، في حين يرغب سلمان في أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي، أو طالبًا يبدأ اسمه بحرف م.

الحوادث المتنافية لقد اختبرت في الدرس 7-5 احتمالات تتضمن تقاطع حادثتين أو أكثر في وقت واحد، وستختبر في هذا الدرس احتمالات تتضمن اتحاد حادثتين أو أكثر.

$P(A$ أو $B)$ ← يدل على اتحاد مجموعتين

$P(A$ و $B)$ ← يدل على تقاطع مجموعتين

عند إيجاد احتمال وقوع حادثة أو وقوع حادثة أخرى يجب أن تعرف العلاقة بين الحادثتين. فإذا لم يكن وقوع الحادثتين ممكنًا في الوقت نفسه يُقال إنهما **متنافيتان**؛ أيْ أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما.

إرشادات للدراسة

الاتحاد
اتحاد مجموعتين هو مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى أو إلى المجموعة الثانية ويرمز لها بالرمز $\cup$.

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد الحوادث المتنافية

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرر إجابتك:

انتخابات: ارجع إلى المعلومات الواردة في أعلى الصفحة.

a) المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو من الصف الثالث الثانوي.
هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة، إذ لا يمكن أن يكون المسؤول طالبًا في الصف الثالث الثانوي والثاني الثانوي في آن واحد.

b) المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م.
هاتان الحادثتان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي وفي الوقت نفسه يبدأ اسمه بحرف م.

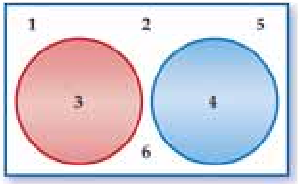
تحقق من فهمك

حدِّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرر إجابتك:

1A) اختيار عدد عشوائيًا من الأعداد من 1 إلى 100 والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10 .

1B) الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة.

إحدى طرق إيجاد احتمال وقوع حادثتين متنافيتين هو اختبار فضاء العيِّنة لهما.



فمثلًا لإيجاد احتمال ظهور 3 أو 4 عند رمي مكعب مرقم، سترى من أشكال فن أنه يوجد ناتجان يحققان هذا الشرط 3 أو 4، لذا فإن

$$P(3 \text{ أو } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بإضافة احتمالي الحادثتين البسيطتين.

$$P(3) = \frac{1}{6} \text{ و } P(4) = \frac{1}{6} \qquad P(3 \text{ أو } 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

يوضحّ هذا المثال القانون الأول من قانوني الجمع في الاحتمالات.

مفهوم أساسي — احتمال الحادثتين المتنافيتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A ، B متنافيتين، فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كل منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A ، B متنافيتين، فإن

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث المتنافية.

قراءة الرياضيات

(أو) يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل، ويشير إلى جمع الاحتمالات. $P(A \text{ أو } B)$ يقرأ احتمال وقوع A أو وقوع B .

مثال 2 من واقع الحياة — الحوادث المتنافية

كتب: اختار موسى كتابًا من الكتب الموجودة في مكتبته المبينة في الجدول المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب دينيًا أو فيزيائيًا؟ هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه لايمكن أن يكون الكتاب دينيًا أوفيزيائيًا في آن واحد.

مكتبة موسى

أنواع الكتب	العدد
دينية	10
فيزيائية	12
كيميائية	13

افرض أن الحادثة $A1$ تمثل اختيار كتاب ديني
وافرض أن الحادثة $A2$ تمثل اختيار كتاب فيزيائي
مجموع الكتب هو $35 = 13 + 12 + 10$.

$$P(A1 \text{ أو } A2) = P(A1) + P(A2) \qquad \text{احتمال الحادثتين المتنافيتين}$$

$$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35} \qquad P(A1) = \frac{10}{35} \text{ ، } P(A2) = \frac{12}{35}$$

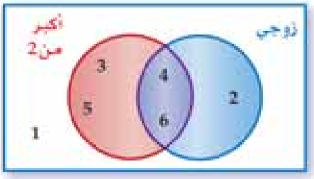
$$= \frac{22}{35} \qquad \text{بالجمع}$$

لذا، فإن احتمال اختيار كتاب ديني أو فيزيائي هو $\frac{22}{35}$ ، ويساوي 63% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2A) رُمي مكعبان مرقمان متمايزان مرة واحدة. ما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كل من وجهي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟

2B) **ألعاب:** إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائيًا من بين 15 محفظة و16 ساعة و14 نظارة و 25 قلمًا و10 كرات، فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟



عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة، ما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ يمكنك أن تلاحظ من أشكال ڤن وجود 5 أعداد أكبر من 2 أو زوجية وهي 2, 3, 4, 5,6 . لذا فإن

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من } 2) = \frac{5}{6}$$

وبما أنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه، فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين، وإذا أخذنا احتمال كل حادثة على حدة فإن:

$$P(\text{زوجي}) = \frac{3}{6} \qquad P(\text{أكبر من } 2) = \frac{4}{6}$$

وإذا جمعنا هذين الاحتمالين فإن احتمالي الناتجين 6 ، 4 يحسبان مرتين، مرة لكونهما عددين أكبر من 2، ومرّة أخرى لكونهما عددين زوجيين. لذا يجب عليك أن تطرح احتمال الناتجين المشتركين.

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من } 2) = P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{عدد أكبر من } 2) - P(\text{عدد زوجي وأكبر من } 2)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

يؤدي هذا المثال إلى قانون الجمع الثاني في الاحتمال.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال حادثتين غير متنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحًا منه احتمال وقوع A و B معًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فإن

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$$

مثال 3 من واقع الحياة — الأحداث غير المتنافية

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائيًّا للمشاركة في مسابقة فنية، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظرًا طبيعيًّا؟

لوحات إبراهيم			
الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

بما أن بعض لوحات إبراهيم مناظر طبيعية ولوحات زيتية في وقت واحد فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.

$$P(\text{لوحة زيتية أو منظر طبيعي}) = P(\text{لوحة زيتية}) + P(\text{منظر طبيعي}) - P(\text{لوحة زيتية و منظر طبيعي})$$

$$= \frac{5+3+2+0}{30} + \frac{1+3+2}{30} - \frac{3}{30} \qquad \text{بالتعويض}$$

$$= \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30} \qquad \text{بالتبسيط}$$

لذا، فإن احتمال أن يختار إبراهيم منظرًا طبيعيًّا أو لوحة زيتية يساوي $\frac{13}{30}$ أو 43% تقريبًا.

الربط مع الحياة

المعارض الفنية

للمعارض الفنية دور في تقدم الفرد في المجتمع، بما تضمه من أفكار إبداعية، وطرق تعبير، تهذّب الأخلاق، وتسمو بالذوق والقيم الإنسانية.

تحقق من فهمك

3) مجموعة بطاقات عددها 52، مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأزرق، الأصفر، ورُقّمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. ما احتمال سحب بطاقة تحمل الرقم 7، أو بطاقة حمراء من هذه المجموعة؟

احتمال الحادثة المتممة عناصر الحادثة المتممة A تتكون من جميع نواتج فضاء العيّنة غير الموجودة في الحادثة A. فمثلًا تعلم أن احتمال الحصول على العدد 4 عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة يساوي $\frac{1}{6}$، وبالتالي فإن احتمال عدم الحصول على العدد 4 هو $\frac{5}{6}$؛ وذلك لأنه توجد 5 نواتج ممكنة لهذه الحادثة هي: $1, 2, 3, 5, 6$. لذا فإن $\frac{5}{6}$ =(عدم الحصول على العدد $P(4$.

لاحظ أن هذا الاحتمال يساوي $1 - \frac{1}{6}$ أو $1 - P(4)$.

مفهوم أساسي — احتمال الحادثة المتممة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة.

بالرموز: لأي حادثة A، $P(A') = 1 - P(A)$

مثال 4 — الحادثة المتممة

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطلب إليها سحب بطاقة عشوائيًا من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة؟

افرض أن A تمثّل اختيار بطاقة رابحة، فأوجد احتمال متممة A

$P(A') = 1 - P(A)$ احتمال المتممة

$= 1 - \frac{20}{300}$ بالتعويض

$= \frac{280}{300} = \frac{14}{15}$ بالطرح و بالتبسيط

احتمال أن تسحب سميرة بطاقة غير رابحة $\frac{14}{15}$، أو 93% تقريبًا.

قراءة الرياضيات

الحادثة المتممة

يرمز إلى الحادثة المتممة للحادثة A بالرمز (A').

✓ تحقق من فهمك

4) إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟

ملخص المفاهيم — قوانين الاحتمال

أضف إلى مطويتك

نوع الحوادث	التعبير اللفظي	القانون
الحادثتان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A , B حادثتين مستقلتين، فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$
الحادثتان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A , B حادثتين غير مستقلتين، فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما .	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B، $P(A\|B) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(B)}$
الحوادث المتنافية	حوادث لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A , B حادثتين متنافيتين فإن $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$
الحوادث غير المتنافية	حوادث توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$
الحوادث المتممة	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العيّنة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأي حادثة A ، $P(A') = 1 - P(A)$

الشهر	عدد حالات الوفاة
محرم	26
صفر	18
ربيع الأول	16
ربيع الآخر	26
جمادى الأولى	22
جمادى الآخرة	23
رجب	21
شعبان	15
رمضان	26
شوال	25
ذو القعدة	23
ذو الحجة	25
المجموع	266

الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ

الربط مع الحياة

يؤدي عدم الالتزام بقواعد وأخلاقيات قيادة السيارات إلى وقوع حوادث مرورية مؤسفة، والجدول أعلاه يبين حالات الوفاة بسبب الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ وفق إحصائيات الإدارة العامة للمرور.

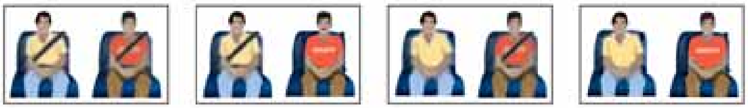
مثال 5 من واقع الحياة — تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها

حزام الأمان: افرض أن 81 % من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقَيْن عشوائيًّا من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

افهم تعلم أن 81% من السائقين يستعملون حزام الأمان. الاصطلاح (واحد على الأقل) يعني واحدًا أو أكثر. لذا أنت بحاجة إلى إيجاد احتمال أن:

- السائق الأول المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو السائق الثاني المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو كلا السائقين المختارين لا يستعمل حزام الأمان.

أي إيجاد $P(A' \cup B')$



خطط الحادثة الموصوفة أعلاه هي الحادثة المتممة لحادثة أن السائقين المختارين يستعملان حزام الأمان.

افرض أن الحادثة A تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان.

وافرض أن الحادثة B تمثّل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان بعد أن يكون قد تمّ اختيار السائق الأول.

إذن المطلوب إيجاد $P[(A \text{ و } B)']$

هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن احتمال الحادثة الأولى يؤثر في احتمال الحادثة الثانية.

حُلّ

$P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B|A)$ احتمال الحادثتين غير المستقلتين

$= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$ $P(A) = \frac{81}{100}$

$= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$ بالضرب

$P[(A \text{ و } B)'] = 1 - P(A \text{ و } B)$ احتمال الحادثة المتممة

$= 1 - \frac{36}{55}$ بالتعويض

$= \frac{19}{55}$ بالطرح

لذا فإن احتمال أن أحد السائقين على الأقل لا يستعمل حزام الأمان يساوي $\frac{19}{55}$ ، أو 35% تقريبًا.

تحقق استعمل التبرير المنطقي للتحقق من معقولية إجابتك.

احتمال اختيار سائق من 100 لا يستعمل حزام الأمان يساوي %(81 − 100)، أو 19% واحتمال اختيار سائقين من 100 لا يستعملانه يجب أن يكون أكبر من 19%. وبما أن 19% < 35% ، فإن الإجابة معقولة.

إرشادات للدراسة

من المثال 5 لاحظ أن

$P(A' \text{ أو } B') = P[(A \text{ و } B)']$

وبالمثل

$P(A' \text{ و } B') = P[(A \text{ أو } B)']$

تحقق من فهمك

5) **هواتف نقالة:** أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير ثلاثة أشخاص عشوائيًّا من مجموعة 100 سائق فما احتمال أن:

A) يستعمل شخصان على الأقل الهاتف النقال في أثناء قيادة السيارة؟

B) يستعمل شخص واحد على الأكثر هاتفه النقال في أثناء قيادة السيارة؟

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرر إجابتك:

1) ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة
2) اختيار سيارة أو حصان.

مثال 2
3) حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي شركة، وكانت جائزته أن يختار عشوائيًّا واحدة من بين 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب، و 7 نظارات. ما احتمال أن يربح بطاقة سفر، أو كتابًا، أو ساعة؟

مثال 3
4) بناءً على الجدول المجاور، اختير طالب في المدرسة. ما احتمال أن يكون الطالب من الصف الثاني الثانوي أو في نادي العلوم؟

النادي	الصف الأول الثانوي	الصف الثاني الثانوي	الصف الثالث الثانوي
الرياضة	12	14	8
العلوم	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
اللغة الإنجليزية	11	15	13

مثال 4
5) إذا كان احتمال إصابتك الهدف عند رمي السهم تساوي $\frac{2}{10}$، فما احتمال أن تخطئ إصابة الهدف؟

مثال 5
6) عدد طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة 100 طالب. حضر حفل التخرج النهائي 91% منهم. إذا اختير طالبان عشوائيًّا من طلاب الصف جميعهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر الحفل؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 3–1 حدّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين (في كل من الأسئلة 9-7)، ثم أوجد الاحتمال، وقرّب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًّا:

7) رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين.
8) اختيار عدد عشوائيًّا من 1 إلى 20 للحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3 .
9) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة للحصول على شعار أو كتابة.
10) **رياضة:** يبين الجدول المجاور أنواع الرياضات التي يقدمها نادٍ رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 16–14. ما احتمال أن يلعب مشارك كرة السلة أو أن يكون عمره 14؟

النادي الرياضي			
العمر	كرة القدم	الكرة الطائرة	كرة السلة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

11) **هدايا:** أراد بعض الطلاب تقديم هدية لزميلهم لحصوله على لقب الطالب المثالي، فوجد معلم الصف أن 10 منهم اختاروا ساعة، و 12 اختاروا قميصًا، و 6 اختاروا هاتفًا نقالًا، و 4 اختاروا ميدالية. إذا اختار المعلم الهدية عشوائيًّا فما احتمال أن تكون هدية الطالب المثالي ساعة أو ميدالية؟

مثال 4 أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:

12) عدم ظهور العدد 3 على أيٍّ من الوجهين الظاهرين، عند إلقاء مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة.
13) عدم ظهور الكتابة على الوجه الظاهر عند إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.
14) سحب خليل عشوائيًّا كرة من كيس فيه 25 كرة متماثلة، إحداها فقط حمراء. ما احتمال ألا يسحب الكرة الحمراء؟
15) بين فئة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 25 سنة، وجد أن نسبة الذين يقبضون أجورهم أسبوعيًّا تساوي 71%. فإذا اختير اثنان عشوائيًّا من بين 100 عامل منهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل يقبض أجرته أسبوعيًّا؟

مثال 5

16) **تدوير:** إذا كانت نسبة الذين يساهمون في إعادة التصنيع في إحدى الدول 31%، واختير شخصان عشوائيًا من مجموعة عددها 100، فما احتمال أن يساهم أحدهما على الأكثر في إعادة التصنيع؟

الربط مع الحياة

إعادة تدوير المواد تحمي الإنسان، وتحافظ على الموارد وترشد الطاقة، وتقي البيئة من المخلفات والانبعاثات الضارة.

17) أجرت مدرسة مسحًا على طلابها البالغ عددهم 265 لمعرفة أي الأنشطة الرياضية يرغبون المشاركة فيها، ومُثلت النتائج بأشكال ڤن. إذا اختير طالب عشوائيًا من هذه المدرسة، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

a) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم أو كرة الطائرة.

b) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم ولا يرغبون المشاركة في كرة السلة.

c) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في الألعاب الثلاث.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **تحدٍّ:** إذا رميت ثلاثة مكعبات مرقمة متمايزة مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر على مكعبين منها على الأقل عدد أقل من أو يساوي 4؟

تبرير: حدد إذا كانت الحادثتان في كل مما يأتي متنافيتين أو غير متنافيتين:

19) اختيار مثلث متطابق الأضلاع ومثلث متطابق الزاويا.

20) اختيار عدد مركب واختيار عدد حقيقي.

21) **مسألة مفتوحة:** صف حادثتين متنافيتين وحادثتين غير متنافيتين.

22) **اكتب:** وضح لماذا لا يساوي مجموع احتمالي حادثتين متنافيتين 1 دائمًا.

تدريب على اختبار

23) **احتمال:** يقدم محل تجاري لزبائنه في يوم الافتتاح الهدايا المبينة في الجدول الآتي. ما احتمال أن يربح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو الساعات؟

الهدية	العدد
أدوات مطبخ	10
أدوات كهربائية	6
ساعات	3
هواتف نقالة	1

A 0.075 B 0.35 C 0.5 D 0.65

24) **احتمال:** رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر؟

A $\frac{1}{6}$

B $\frac{2}{3}$

C $\frac{5}{6}$

D 1

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كل مما يأتي، ثم أوجد الاحتمال: الدرس (5-7)

25) ظهور العدد 2 في الرمية الأولى لمكعب مرقم، ثم ظهور العدد 3 عند رمي المكعب للمرة الثانية.

26) تكرار ظهور الرقم 3 في تجربة سحب بطاقتين متتاليتين عشوائيًا دون إرجاع من صندوق يحتوي على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13.

27) **رياضة:** أظهرت نتائج مسح إحصائي لطلاب مدرسة ثانوية أن 15% من الرياضيين في المدرسة يمارسون لعبة كرة الطائرة فقط، و20% يمارسون التنس فقط، و30% لعبة كرة السلّة فقط، وأن 35% يمارسون كرة القدم فقط. صمّم محاكاة يمكن استعمالها لتقدير احتمال أن يمارس لاعب إحدى هذه الألعاب. الدرس (4-7)

الفصل 7

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل فضاء العيِّنة (الدرس 1-7)

- فضاء العيِّنة لتجربة هو مجموعة كل النواتج الممكنة.
- يمكن تحديد فضاء العيِّنة باستعمال قائمة منظمة أو جدول أو الرسم الشجري.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق (الدرس 2-7)

- الترتيب مهم في التباديل.

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- الترتيب غير مهم في التوافيق.

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-7)

- إذا احتوت المنطقة A المنطقة B واختيرت نقطة E عشوائيًا من المنطقة A فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي $\frac{B \text{ مساحة المنطقة}}{A \text{ مساحة المنطقة}}$

محاكاة مواقف واقعية (الدرس 4-7)

- يُستعمل في المحاكاة نموذجًا احتماليًا لإنشاء موقف عدة مرات حتى يمكن تقدير احتمالات النواتج المختلفة.

احتمالات الحوادث المركبة (الدرسان 5-7 و 6-7)

- إذا كانت الحادثة A لا تؤثر في احتمال وقوع الحادثة B، فإن الحادثتين مستقلتان ويكون $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$
- إذا كانت الحادثتين A و B غير مستقلتين، فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- إذا لم يكن وقوع الحادثتين A و B ممكنًا في الوقت نفسه فإنهما متنافيتان ويكون $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$
- إذا لم تكن A و B متنافيتين، فإن $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية قد دونت في مطويتك.

المفردات

- فضاء العيِّنة ص 108
- المحاكاة ص 128
- الرسم الشجري ص 108
- المتغير العشوائي ص 130
- تجربة ذات مرحلتين ص 109
- القيمة المتوقعة ص 130
- تجارب متعددة المراحل ص 109
- قانون الأعداد الكبيرة ص 131
- مبدأ العد الأساسي ص 110
- الحادثة المركبة ص 135
- التباديل ص 114
- الحوادث المستقلة ص 135
- المضروب ص 114
- الحوادث غير المستقلة ص 135
- التباديل الدائرية ص 116
- الاحتمال المشروط ص 137
- التوافيق ص 117
- شجرة الاحتمال ص 137
- الاحتمال الهندسي ص 121
- الحوادث المتنافية ص 141
- النموذج الاحتمالي ص 128
- الحادثة المتممة ص 144

اختبر مفرداتك

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل المصطلح الذي تحته خط حتى تصبح صحيحة:

1) تُستعمل في الرسم الشجري قطع مستقيمة لعرض النواتج الممكنة.

2) التباديل هي تنظيم لمجموعة من العناصر حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

3) تحديد تراتيب جلوس مجموعة من الأشخاص حول منضدة دائرية يتطلب التباديل الدائرية.

4) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا مثال على الحوادث غير المستقلة.

5) يتضمن الاحتمال الهندسي قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة.

6) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$، مثال على المضروب.

7) تُسمى مجموعة كل النواتج الممكنة فضاء العيِّنة .

8) ألقى يوسف قطعة نقد 200 مرة لتكوين شجرة احتمال للتجربة.

9) أخذ قميصين الواحد تلو الآخر من خزانة ملابس دون إرجاع مثال على الحوادث المتنافية.

مراجعة الدروس

7-1 تمثيل فضاء العيّنة ص 113–108

10) **فشار،** يبيع محل تجاري أكياس فشار ذات حجم صغير (S) أو حجم وسط (M) أو حجم كبير (L)، ودون زبدة (NB) أو مع زبدة (B) أو مع زبدة إضافية (EB). مثّل فضاء العيّنة لأنواع الفشار باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

11) **أحذية،** يبيع محل تجاري أحذية من بين المقاسات: 36، 37، 38، 39، 40، 41، 42، 43، 44، وبلونين: بني أو أسود. كم زوجًا مختلفًا يمكن اختياره؟

مثال 1

أُلقيت ثلاث قطع نقد متمايزة مرة واحدة. مثّل فضاء العيّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة.

أقرن كل ناتج ممكن من القطعة الأولى بالنواتج من القطعتين الثانية والثالثة.

LLL, LLT, LTL, LTT, TLL, TLT, TTL, TTT

7-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق ص 120–114

12) **مطعم،** ذهب ثلاثة طلاب من الصف الأول الثانوي وثلاثة طلاب من الصف الثالث المتوسط إلى مطعم وجلسوا حول منضدة مستديرة. فإذا اشترط حسين من الصف الأول الثانوي ألا يجلس بجانب أي طالب من الصف الثالث المتوسط، واشترط إبراهيم من الصف الثالث المتوسط ألا يجلس بجانب أي طالب من الأول الثانوي. فما عدد التراتيب الممكنة؟

13) ترغب مجموعة من 10 طالبات في تشكيل لجنة من 3 منهن يتم اختيارهن عشوائيًا من المجموعة. ما احتمال اختيار نوال ودانة وفاطمة لهذه اللجنة؟

14) **مسابقات،** بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من 32 طالبًا لتشكيل فريق لمسابقة أكاديمية؟

مثال 2

بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

$P_n = (n-1)!$ قانون التباديل الدائرية

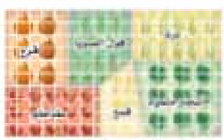
$P_4 = (4-1)!$ $n = 4$

$= 3! = 6$ بالتبسيط

لذا، فهناك 6 طرائق لجلوس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة.

7-3 الاحتمال الهندسي ص 126–121

15) **زراعة،** الشكل المجاور يمثل مخططًا لمزرعة. إذا كان كل مربع صغير يمثل وحدة مساحة مربعة واحدة، فأجب عن كل مما يأتي:



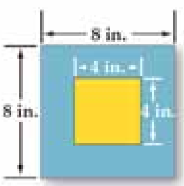
a) ما المساحة التقريبية لحقلي فول الصويا والذرة معًا؟

b) إذا اختير أحد المربعات عشوائيًا، فأوجد احتمال أنه يُستعمل لزراعة الذرة.

16) يجلس الطلاب هاني وعمر وراشد وعبد الكريم (على الترتيب) على حافة بركة بحيث يجلس هاني على بعد 2ft من عمر، ويجلس عمر على بعد 4ft من راشد، ويجلس راشد على بعد 3ft من عبد الكريم. إذا وقعت ريشة طائر بينهم، فأوجد احتمال أن تكون قد وقعت بين هاني وعمر.

مثال 3

لعبة رمي الكرة.



a) إذا ألقى حاتم كرة على المنطقة المبينة في الشكل، فما احتمال أن تقع في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الصفراء $16 = 4 \cdot 4$

$P(\text{أن تقع الكرة في المنطقة الصفراء}) = \frac{16}{64} = 25\%$

b) ما احتمال ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الزرقاء $48 = 64 - 16 = 16 - (8 \cdot 8)$

$P(\text{ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء}) = \frac{48}{64} = 75\%$

الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

7-4 محاكاة مواقف واقعية ص 128–134

صف كيف يمكنك استعمال نماذج الاحتمالات الهندسية لتصمم محاكاة في كل مما يأتي:

17) **كرة يد:** يحرز حسن 35% من الأهداف التي يسجلها فريقه في كل مباريات كرة اليد.

18) **نتائج اختبار:** أظهرت نتيجة دراسة مسحية لاختبار أن 30% من الطالبات قد حصلن على تقدير ممتاز، و 22% منهن حصلن على تقدير جيد جدًا، وَ 23% منهن حصلن على تقدير جيد وَ 25% منهن حصلن على تقدير مقبول.

مثال 4

سجل سامي 75% من ضربات الجزاء في دوري كرة اليد في الموسم الماضي، صمّم محاكاة يمكن استعمالها لتقدير احتمال تسجيله ضربة الجزاء التالية في هذا الموسم.

استعمل تجربة تدوير المؤشر للقرص المبين في الشكل المجاور المقسّم إلى قطاعين على أن يمثل القطاع الأحمر 75% من مساحة القرص، والقطاع الأزرق يمثل 25% من مساحته.
ويتم تدوير المؤشر 50 مرة، تمثل كل دورة ضربة جزاء. وتعني المحاولة الناجحة تسجيل هدف، أما المحاولة الفاشلة؛ فتعني عدم التسجيل.

7-5 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة ص 135–140

19) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. إذا سحبت 3 كرات على التوالي دون ارجاع، فما احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية سوداء والثالثة بيضاء؟

20) مجموعة بطاقات عددها 52 مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: أحمر، وأزرق، وأسود، وأصفر، وكل لون يشمل 13 بطاقة مرقمة من 1 إلى 13. فإذا سُحبت بطاقتان من هذه المجموعة مع الإرجاع، فما احتمال سحب بطاقة تحمل الرقم 3، ثم بطاقة تحمل الرقم 9؟

21) أظهرت نتائج دراسة مسحية أن 72% من الناس يحبون المطالعة، فإذا اختير 3 أشخاص عشوائيًا من بين 100 شخص، فما احتمال أن يكون الثلاثة من الذين يحبون المطالعة؟

مثال 5

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء وكرتين بيضاوين و 6 كرات زرقاء. فإذا سحبت 3 كرات على التوالي ودون إرجاع، فما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة زرقاء؟

بما أن الكرة المسحوبة لا تُعاد إلى الكيس، فإن الحوادث ليست مستقلة، بل هي على النحو الآتي:

$$P(\text{حمراء وحمراء وزرقاء}) = P(\text{حمراء}) \cdot P(\text{حمراء}) \cdot P(\text{زرقاء})$$

$$= \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{6}{9}$$

$$= \frac{2}{55} \approx 3.6\%$$

7-6 احتمالات الحوادث المتنافية ص 141–147

22) رُمي مكعبان مرقمان متمايزان مرة واحدة. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين عليهما 7 أو 11؟

23) سُحبت بطاقة من مجموعة البطاقات الواردة في السؤال 20، ما احتمال أن تحمل الرقم 10 أو يكون لونها أحمر؟

24) يحتوي صندوق على 40 بطاقة مرقمة من 1 إلى 40، سُحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًا.

a) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًا أو أقل من 5؟

b) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟

مثال 6

عند إلقاء مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 5، أو أن يكون العددان على الوجهين الظاهرين متساويين؟

هذان الحدثان متنافيان؛ لأن مجموع عددين متساويين لا يمكن أن يكون 5 .

$$P(\text{المجموع 5 أو متساويان}) = P(\text{المجموع 5}) + P(\text{متساويان})$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{6}{36}$$

$$= \frac{5}{18} \approx 27.8\%$$

الفصل 7 اختبار الفصل

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{AE}$. فأوجد كلًّا مما يأتي:

1) $P($تقع X على $\overline{AC})$
2) $P($تقع X على $\overline{CD})$

3) **سباحة:** يتكون فريق سباحة من 9 طلاب. ما عدد الطرائق الممكنة لترتيبهم في 9 مسارات متجاورة في بركة السباحة؟

4) **سفر:** يحتاج مندوب مبيعات إلى زيارة أربع مدن. ما عدد خطط الرحلات المختلفة التي يمكن أن يعدّها لزيارة كل مدينة مرة واحدة؟

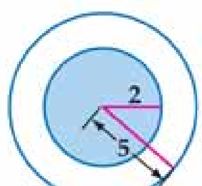
مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري:

5) يحتوي صندوق على كرة واحدة من كل لون من الألوان الآتية: الأحمر (R)، والأخضر (G)، والأزرق (B). سُحبت منه كرتان واحدة تلو الأخرى دون إرجاع.

6) أراد خليفة أن يأكل شطيرة، وعندما ذهب إلى المطعم وجد عنده نوعين من الشطائر هما: بالجبن (C)، وباللحم (M)، فقرر شراء شطيرتين.

7) **كتابة:** بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب أحرف الكلمة "متململ"؟

8) **تصويب:** يسدد صياد بندقيته نحو الهدف كما في الشكل المجاور. ما احتمال أن يصيب المنطقة المظللة؟

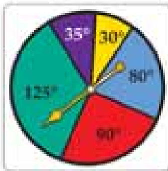


9) **أعداد:** ما احتمال أن يكون عدد مكون من الأرقام السبعة الآتية 7, 7, 7, 2, 2, 2, 6 هو 6222777؟

10) **مسابقات:** اشتركت خمس عشرة طالبة في مسابقة ذات ثلاث جوائز. ما احتمال أن تربح المتسابقات جنان وسارة وكوثر الجوائز الثلاث؟

11) حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال. سحب بطاقتين حمراوين الواحدة تلو الأخرى من صندوق يحوي 5 بطاقات صفراء و5 حمراء و 5 برتقالية مع الإرجاع.

استعمل تجربة القرص ذي المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كل من الاحتمالات الآتية، (إذا استقر المؤشر على خط تُعاد التجربة).



12) P (استقرار المؤشر على اللون البنفسجي)
13) P (استقرار المؤشر على اللون الأحمر)
14) P (استقرار المؤشر على لون غير الأصفر)

15) **كرة قدم:** تبين أن فريق كرة القدم يقضي 40% من زمن المباراة في الهجوم، 30% في الدفاع، ويستغرق رجوع اللاعبين إلى مواقعهم 5%، على حين تستغرق رميات التماس 25% من الزمن. صمّمْ محاكاة باستعمال مولد الأعداد العشوائية، وسجل النتائج مستعملًا ملخصات عددية وبيانية ملائمة.

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرّر إجابتك:

16) يمتلك رجل سيارة وشاحنة.

17) رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين مجموعهما 7، و ظهور العدد 6 على أحد وجهي المكعبين.

18) سحب بطاقة حمراء وزرقاء من مجموعة بطاقات مكونة من 13 بطاقة حمراء، و 13 زرقاء، و 13 صفراء، و 13 خضراء.

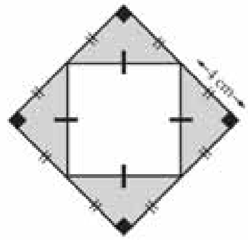
اختبار تراكمي

للفصول 1-7

اختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) اختيرت نقطة عشوائيًا في الشكل المجاور، مااحتمال وقوعها في المنطقة المظللة ؟



A 0.0625

B 0.125

C 0.25

D 0.5

2) كم عددًا مكونًا من 3 أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 2,6,1 دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

A 3 C 12

B 6 D 27

3) إذا كانت A , B حادثتين متنافيتين في فضاء العيّنة لتجربة عشوائية ما ، وكان $P(A)=\frac{1}{3}$ ، $P(B)=\frac{1}{2}$، فما قيمة P (A أو B)؟

A 0 C $\frac{5}{6}$

B $\frac{2}{5}$ D $\frac{1}{6}$

4) مجموع المتسلسلة $\sum_{k=1}^{20}(4+3k)$ يساوي:

A 710

B 140

C 71

D 7

5) يكتب المقدار: $\frac{5}{6x-18}-\frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

في أبسط صورة على النحو:

A $\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$

B $\frac{2-7x}{6(x-3)(2x-1)}$

C $\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

D $-\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

6) إذا كانت A حادثة في فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان $P(A)=0.8$ ، فما احتمال عدم وقوع الحادثة A؟

A 0.8

B 0.2

C 0.16

D -0.2

7) سحبت عينتان عشوائيًا واحدة تلو الأخرى ودون إرجاع من صندوق يحتوي على عينات من فصائل دم مختلفة، فإذا كان في الصندوق 4 عينات من فصيلة الدم A، و3 عينات من فصيلة الدم B، و6 عينات من فصيلة الدم AB، و5 عينات من فصيلة الدم O، فما احتمال أن تكون العينتان المسحوبتان من فصيلة الدم AB؟

A $\frac{1}{51}$

B $\frac{1}{9}$

C $\frac{5}{51}$

D $\frac{1}{3}$

إجابة قصيرة

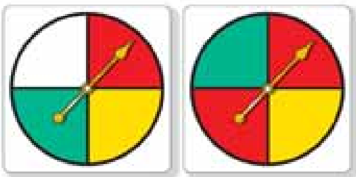
أجب عن كل مما يأتي:

8) التقت الصديقتان هدى ودلال بعد عدة سنوات من تخرجهما في الجامعة ودار بينهما الحوار الآتي:

هدى: مرحبًا يا دلال، بلغني أنك تزوجت، فهل رزقك الله أطفالًا؟
دلال: نعم، رزقني الله طفلين.
هدى: وهل رزقك الله بناتٍ؟
دلال: نعم.
اعتمادًا على هذا الحوار، ما احتمال أن يكون لدلال بنتان؟

9) إذا كانت $d(x) = x^3 + x + 2$، فما قيمة $d(4a^2)$ ؟

10) إذا دار المؤشران في الشكل أدناه، فما احتمال أن يتوقف كلاهما على اللون الأحمر؟ علمًا بأن القرصين مقسمان إلى أقسام متساوية، وإذا توقف أي من المؤشرين على الخط الفاصل بين الأقسام يعاد تدويرهما.



11) حدِّد كلًّا من مجال الدالة $f(x) = [[x]] - 5$ ومداها؟

إجابة طويلة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل:

12) تحتوي حقيبة على 3 بطاقات حمراء و 5 بطاقات خضراء وبطاقتين صفراوين و 4 بطاقات بنّية و 6 بطاقات بنفسجية. سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًا وسُجلَ اللون، ثم أُعيدت إلى الحقيبة وسحبت بطاقة أخرى.

a) هل الحادثتان مستقلتان أو غير مستقلتين؟ وضّح إجابتك.

b) ما احتمال أن تكون البطاقتان بنفسجيتين؟

c) ما احتمال أن تكون البطاقة الأولى خضراء والثانية بنيّة؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
فعد إلى الدرس ...	7-3	7-1	7-6	6-3	5-2	7-6	7-5	7-5	3-5	7-5	1-3	7-5

الفصل
8
حساب المثلثات
Trigonometry

فيما سبق:
درست تحليل الدوال وتمثيلها بيانيًا.

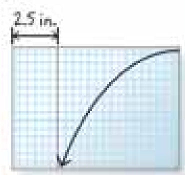
والآن:
- أجد قيم دوال مثلثية.
- أحل مسائل باستعمال النسب المثلثية للمثلث القائم الزاوية.
- أستعمل قانون الجيوب وقانون جيوب التمام في حل المثلث.
- أمثّل دوالّ مثلثية بيانيًا.

لماذا؟
القياس غير المباشر:
للدوال المثلثية تطبيقات عملية في القياس غير المباشر، فمثلًا يمكن استعمال النسب المثلثية لمعرفة ارتفاعات الجبال أو الأشجار الشاهقة أو ناطحات السحاب أو إيجاد البعد بين جبلين أو عرض نهر.

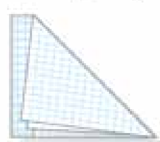
المطويات منظم أفكار

حساب المثلثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول حساب المثلثات، مبتدئًا بأربع أوراق من أوراق الرسم البياني.

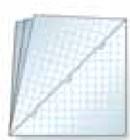
1. **جمّع** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض، وارسم خطًا عرضيًا على مسافة 2.5 in من الحافة.



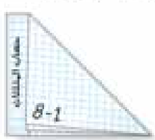
2. **اطوِ** الأوراق على القطر، حتى الخط المرسوم، كما في الشكل.



3. **ثبّت** الأوراق على طول القطر لتشكل كتيبًا.



4. **عنون** الحافة بحساب المثلثات، ورقّم الصفحات بأرقام الدروس.



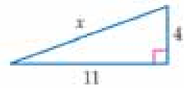
التهيئة للفصل الثامن

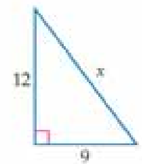
تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

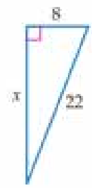
البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد قيمة x مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

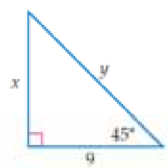
1)


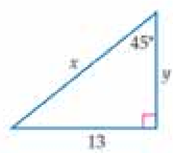
2)


3)


4) لدى راشد حديقة مستطيلة الشكل بعداها 6m و 4m . يريد أن يرصف ممرًّا على قطر الحديقة. كم سيكون طول الممر؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

أوجد القياسين المجهولين في كل مما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة):

5)


6)


7) يستند سلم إلى جدار بحيث يصنع معه زاوية 45° . إذا كان طول السلم 12 ft، فأوجد ارتفاع قمته عن الأرض.

مراجعة سريعة

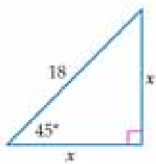
مثال 1

أوجد القياس المجهول في المثلث القائم الزاوية أدناه.

$c^2 = a^2 + b^2$	نظرية فيثاغورس
$18^2 = a^2 + 5^2$	بالتعويض عن c بـ 18 و b بـ 5
$324 = a^2 + 25$	بالتبسيط
$299 = a^2$	بطرح 25 من كلا الطرفين
$17.3 \approx a$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

مثال 2

أوجد القياسين المجهولين فيما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة):



$x^2 + x^2 = 18^2$	نظرية فيثاغورس
$2x^2 = 18^2$	بجمع الحدود المتشابهة
$2x^2 = 324$	بالتبسيط
$x^2 = 162$	بقسمة كلا الطرفين على 2
$x = \sqrt{162}$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين
$x = 9\sqrt{2}$	بالتبسيط

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

8-1

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية
Trigonometric Functions in Right Triangles

فيما سبق:

درست استعمال نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية.

والآن:

- أجد قيم الدوال المثلثية لزوايا حادة.
- أستعمل الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلثات قائمة الزاوية.

المفردات:

حساب المثلثات trigonometry

النسبة المثلثية trigonometric ratio

الدالة المثلثية trigonometric function

الجيب sine

جيب التمام cosine

الظل tangent

قاطع التمام cosecant

القاطع secant

ظل التمام cotangent

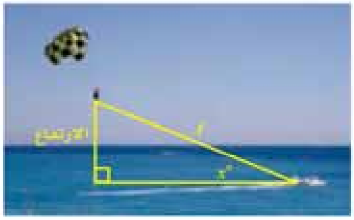
دوال المقلوب reciprocal functions

زاوية الارتفاع angle of elevation

زاوية الانخفاض angle of depression

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



يعتمد ارتفاع الشخص في التزلج الهوائي على طول حبل السحب ℓ والزاوية $x°$ التي يصنعها الحبل مع الخط الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، يمكنك استعمال نسبة معينة لإيجاد ارتفاع المتزلج.

الدوال المثلثية للزوايا الحادة يُعرَّف **حساب المثلثات** بأنه دراسة العلاقات بين زوايا وأضلاع المثلث القائم الزاوية. وتقارن **النسبة المثلثية** بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية، أمّا **الدالة المثلثية** فتُعرف من خلال نسبة مثلثية.

يُستعمل الرمز الإغريقي θ عادة للدلالة على قياس زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية. حيث يُستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور لها جميعًا في تعريف الدوال المثلثية الست.

مفهوم أساسي — الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

الرموز:

$\sin\theta$ (θ جيب) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\csc\theta$ (θ قاطع تمام) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

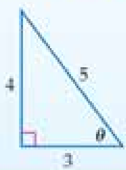
$\cos\theta$ (θ جيب تمام) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\sec\theta$ (θ قاطع) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\tan\theta$ (θ ظل) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\cot\theta$ (θ ظل تمام) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

أمثلة:

$\sin\theta = \frac{4}{5}$ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\tan\theta = \frac{4}{3}$

$\csc\theta = \frac{5}{4}$ $\sec\theta = \frac{5}{3}$ $\cot\theta = \frac{3}{4}$



مثال 1 إيجاد قيم الدوال المثلثية

إذا كانت θ تمثل زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ إذا كان:

طول الضلع المقابل للزاوية θ: $8 = (BC)$، طول الضلع المجاور للزاوية θ: $15 = (AC)$، طول الوتر: $17 = (AB)$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17} \quad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17} \quad \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{17}{8} \quad \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{17}{15} \quad \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{15}{8}$$

تحقق من فهمك

1) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية B.

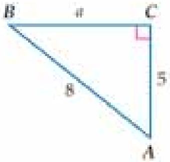
لاحظ أن النسب: قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام، هي مقلوب النسب: الجيب، وجيب التمام، والظل على الترتيب. وتستعمل في تعريف **دوال المقلوب**. حيث يمكن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

مجال أي دالة مثلثية هو مجموعة قياسات الزوايا الحادة θ في المثلث القائم الزاوية. لذا، فإن الدوال المثلثية تعتمد فقط على قياسات الزوايا الحادة وليس على أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

مثال 2 إيجاد النسب المثلثية

$\angle B$ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$ فأوجد قيمة $\tan B$.



الخطوة 1: ارسم مثلثًا قائم الزاوية وسمِّ إحدى زواياه الحادة B.

بما أن $\sin B = \frac{5}{8} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$. فحدد على الرسم طول الضلع المقابل بـ 5، والوتر بـ 8.

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد a.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$a^2 + 5^2 = 8^2$	$b = 5,\ c = 8$
$a^2 + 25 = 64$	بالتبسيط
$a^2 = 39$	بطرح 25 من كلا الطرفين
$a = \pm\sqrt{39}$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$a = \sqrt{39}$	الطول لا يمكن أن يكون سالبًا

الخطوة 3: أوجد قيمة $\tan B$.

$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	دالة الظل
$= \frac{5}{\sqrt{39}}$	بالتعويض عن المقابل بـ 5 والمجاور بـ $\sqrt{39}$
$= \frac{5\sqrt{39}}{39}$	بإنطاق المقام

تحقق من فهمك

2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$، فأوجد قيمة $\sin B$.

قراءة الرياضيات

تسمية المثلثات

تُستعمل الأحرف الكبيرة خلال هذا الفصل للدلالة على رؤوس المثلث وقياسات زوايا الرؤوس. ويُستعمل الحرف الصغير المقابل للحرف الكبير للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية وتتضح دلالة الحرف من السياق.

تتكرر الزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ كثيرًا في حساب المثلثات. والجدول أدناه يُعطي قيم ثلاث دوال مثلثية لكل منها.

مفهوم أساسي: بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

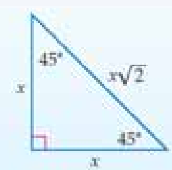
أضف إلى مطويتك

$30°-60°-90°$

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \sqrt{3}$$

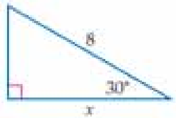
$45°-45°-90°$



$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = 1$$

استعمال الدوال المثلثية: يمكنك استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث قائم الزاوية.

مثال 3 إيجاد طول ضلع مجهول



استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

طول الوتر يساوي 8. الطول المجهول هو الضلع المجاور للزاوية $30°$.
استعمل دالة جيب التمام لإيجاد قيمة x.

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ دالة جيب التمام

$\cos 30° = \frac{x}{8}$ بالتعويض عن θ بـ $30°$، المجاور بـ x، الوتر بـ 8

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$ بضرب كلا الطرفين في 8

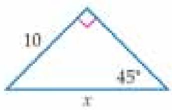
$6.9 \approx x$ باستعمال الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم:

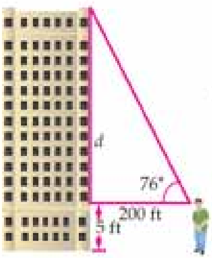
(3A

(3B



يمكنك استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات التي لا تتضمّن زواياها أيًّا من الزوايا: $30°, 45°, 60°$.

مثال 4 إيجاد طول ضلع مجهول



بناية: لحساب ارتفاع بناية، مشى أحمد مسافة 200 ft مبتعدًا عن قاعدة البناية. واستعمل أداة (مقياس زاوية الميل) لقياس الزاوية المحصورة بين خط نظره المار بقمة البناية والخط الأفقي. إذا كان مستوى نظره على ارتفاع 5 ft، فما ارتفاع البناية؟

الزاوية المقيسة كما يوضّح الشكل هي $76°$. طول الضلع المجاور لها 200 ft، الضلع المجهول طوله هو الضلع المقابل لها. استعمل دالة الظل لإيجاد d.

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ دالة الظل

$\tan 76° = \frac{d}{200}$ بالتعويض عن θ بـ $76°$، والمقابل بـ d، والمجاور بـ 200

$200 \tan 76° = d$ بضرب الطرفين في 200

$802 \approx d$ باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

بما أن مقياس زاوية الميل كان على ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض، فإن ارتفاع البناية يساوي 807 ft تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

إرشادات للدراسة

اختيار دالة
إذا كان طول الوتر مجهولاً فإنه يجب استعمال دالة الجيب أو دالة جيب التمام لإيجاد القيمة المجهولة.

الربط مع الحياة

مقاييس زاوية الميل تُستعمل لقياس زاوية ميل المجال المغناطيسي الأرضي ودرجة ميل واهتزاز المركبات والقوارب والطائرات، كما تُستعمل في رصد البراكين وحفر الآبار.

عند حل معادلات مثل $3x = -27$، تستعمل العملية العكسية للضرب. كما يمكنك استعمال معكوس: الجيب أو جيب التمام أو الظل في إيجاد قياسات الزوايا.

مفهوم أساسي — معكوس النسب المثلثية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيبها يساوي x، فإن: **معكوس جيب** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\sin A = x$، فإن: $\sin^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيب التمام لها يساوي x، فإن: **معكوس جيب تمام** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\cos A = x$، فإن: $\cos^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وظلها يساوي x، فإن: **معكوس ظل** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\tan A = x$، فإن: $\tan^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1}\sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

قراءة الرياضيات

معكوس النسب المثلثية

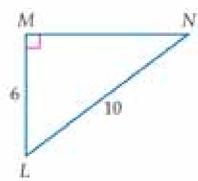
تقرأ العبارة $\sin^{-1} x$ معكوس جيب x وتعني الزاوية التي جيبها x. كن حذرًا فلا تخلط هذا الرمز مع رمز الأس السالب: $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$. يشبه هذا الرمز رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$.

إذا علمت الجيب، أوجيب التمام أوالظل لزاوية حادة يمكنك استعمال الحاسبة لإيجاد قياس هذه الزاوية والذي هو معكوس النسبة المثلثية المعلومة.

مثال 5 — إيجاد قياس زاوية مجهولة

أوجد قياس كل زاوية مما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

a) $\angle N$



بما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية N وطول الوتر. استعمل دالة الجيب.

$\sin N = \frac{6}{10}$ — $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sin^{-1}\frac{6}{10} = m\angle N$ — معكوس الجيب

$36.9° \approx m\angle N$ — باستعمال الآلة الحاسبة

b) $\angle B$

استعمل دالة جيب التمام.

$\cos B = \frac{8}{16}$ — $\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

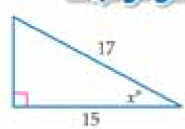
$\cos^{-1}\frac{8}{16} = m\angle B$ — معكوس جيب التمام

$60° = m\angle B$ — باستعمال الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك

أوجد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

(5A



(5B

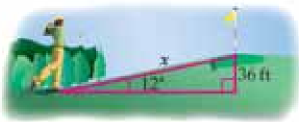
إرشادات للدراسة

زوايا الارتفاع والانخفاض زاويتا الارتفاع والانخفاض متطابقتان للحالة الواحدة؛ لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لخطين متوازيين.

في الشكل إلى اليسار، تُسمّى الزاوية المحصورة بين خط نظر السابح إلى المنقذ والخط الأفقي **زاوية الارتفاع**. كما تُسمّى الزاوية المحصورة بين خط نظر المنقذ إلى السابح والخط الأفقي **زاوية الانخفاض**.

مثال 6 استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض

a) لعبة الجولف: يقف لاعب جولف أسفل تلّ وينظر إلى الحفرة في القمة. إذا كان ارتفاع التل 36 ft، وزاوية ارتفاع أسفل التل عن الحفرة هي 12°. أوجد المسافة من أسفل التل إلى الحفرة.



اكتب معادلة باستعمال دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 12°) إلى المسافة من أسفل التل إلى الحفرة (الوتر).

$\sin 12° = \frac{36}{x}$ — $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

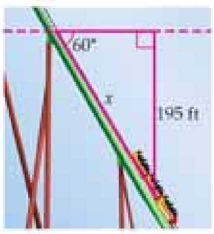
$x \sin 12° = 36$ — بضرب كلا الطرفين في x

$x = \frac{36}{\sin 12°}$ — بقسمة كلا الطرفين على $\sin 12°$

$x \approx 173.2$ — باستعمال الآلة الحاسبة

لذا، فإن المسافة من أسفل التل إلى الحفرة يساوي: 173.2 ft تقريبًا.

b) العربة الدوارة: زاوية انحدار (انخفاض) جزء من مسار عربة دوارة في إحدى مدن الألعاب هي 60°. وينحدر هذا المسار من ارتفاع رأسي مقداره 195 ft. قدّر طول هذا الجزء من المسار.



اكتب معادلة باستعمال دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 60°) إلى طول الجزء من المسار (الوتر).

$\sin 60° = \frac{195}{x}$ — $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$x \sin 60° = 195$ — بضرب كلا الطرفين في x

$x = \frac{195}{\sin 60°}$ — بقسمة كلا الطرفين على $\sin 60°$

$x \approx 225.2$ — باستعمال الآلة الحاسبة

لذا، فإن طول هذا الجزء من المسار يساوي 225.2 ft تقريبًا.

الربط مع الحياة

أكثر العربات الدوارة انحدارًا في العالم لها زاوية انحدار (انخفاض) تقارب 90°.

تحقق من فهمك

6A) تفريغ حمولة: استعمل سطحًا مائلًا لتفريغ شاحنة بزاوية ارتفاع قياسها 32°. إذا كان ارتفاع السطح عند باب الشاحنة عن الأرض 1.2 m، قدر طول السطح المائل.

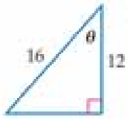
6B) سلالم: سلم طوله 4m يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها 72°. ما ارتفاع قمة السلم عن الأرض؟

تأكـد

مثال 1 أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ:

(1

(2



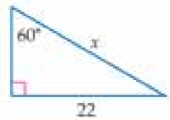
مثال 2 معتبرًا $\angle A$ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية:

(3 إذا كان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فما قيمة $\sin A$؟

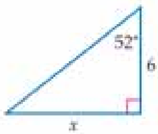
(4 إذا كان $\tan A = \frac{20}{21}$، فما قيمة $\cos A$؟

المثالان 3, 4 استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة:

(5



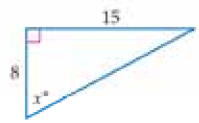
(6



(7

مثال 5 أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة:

(8



(9

(10

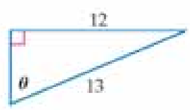
مثال 6 **(11** **أشجار:** يقف عبدالله ملاصقًا لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرك مبتعدًا عن مكانه مسافة 100 ft، في مسار عمودي على الخط الواصل بين الشجرتين، ومشكّلًا معهما زاوية قياسها $70°$ ، فما البعد بين الشجرتين؟

(12 **سلالم:** إذا علمت أن زاوية ارتفاع السلالم الموصى بها لمكافحة الحرائق هي $75°$. إلى أي ارتفاع على بناية يمكن لسلم طول 6.5 m أن يصل، إذا تم الاعتماد على زاوية الارتفاع الموصى بها؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

تدرب وحل المسائل

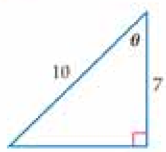
مثال 1 أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي:

(13

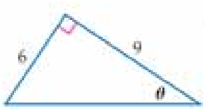


(14

(15



(16



مثال 2 إذا علمت أن $\angle A$, $\angle B$ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية، فأجب عما يأتي:

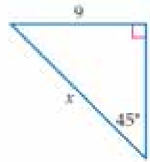
(17 إذا كان $\tan A = \frac{8}{15}$، فما قيمة $\cos A$؟

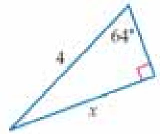
(18 إذا كان $\cos A = \frac{3}{10}$، فما قيمة $\tan A$؟

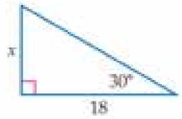
(19 إذا كان $\tan B = 3$، فما قيمة $\sin B$؟

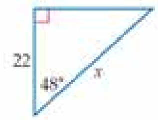
(20 إذا كان $\sin B = \frac{4}{9}$ ، فما قيمة $\tan B$؟

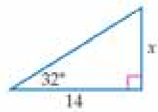
المثالان 3, 4 في كل مما يأتي، استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

(21


(22


(23


(24


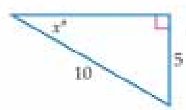
(25


(26

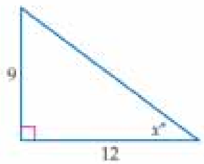

(27 **تزلج هوائي،** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" واستعن بالمثلث إلى اليسار. أوجد قيمة a التي تُمثّل ارتفاع المتزلج إذا كان طول حبل السحب 250 ft وقياس الزاوية المحصورة بين الحبل والخط الأفقي تساوي °32. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

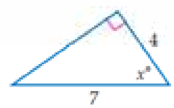
(28 يقف فيصل ملاصقًا لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرك مبتعدًا عن مكانه مسافة 20 m، في مسار عموديّ على الخط الواصل بين الشجرتين، ومشكّلًا معهما زاوية قدرها °52 ، فما البعد بين الشجرتين؟

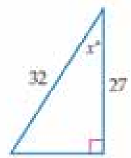
مثال 5 في كل مما يأتي، أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

(29


(30


(31


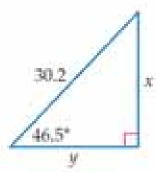
(32


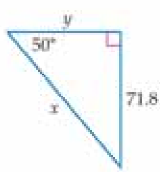
(33


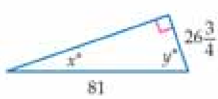
(34


مثال 6 (35 **تسلّق،** تسلّق أحد الأشخاص تلًا بزاوية ارتفاع قياسها °20، أوجد ارتفاع الشخص عندما يكون قد قطع مسافة أفقية مقدارها 18m.

في كل مما يأتي استعمل دوال مثلثية، لإيجاد قيمة كل من x, y. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

(36


(37


(38


حُلّ كلًا من المعادلات الآتية:

(39 $\cos A = \frac{3}{19}$

(40 $\sin N = \frac{9}{11}$

(41 $\tan X = 15$

(42 $\sin T = 0.35$

(43 $\tan G = 0.125$

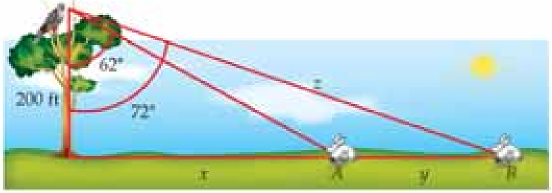
(44 $\cos Z = 0.98$

🌍 الربط مع الحياة

يستطيع الصقر رؤية أجسام طولها 10 cm عن بعد 1.5 km. كما أنه يستطيع رؤية الأشياء بوضوح عندما ينقض بسرعة 100 ميل/ الساعة.

45) **أعشاش:** تنظر فاطمة نحو عش طائر على شجرة بزاوية ارتفاع قياسها $74.5°$، فإذا كان مستوى نظرها يرتفع 5 ft عن سطح الأرض، وكانت تقف على بعد 12 ft من قاعدة الشجرة. فما ارتفاع عُشّ الطائر عن سطح الأرض؟ قرّب إلى أقرب قدم.

46) **صقور:** رأى صقر من ارتفاع 200 ft أرنبين A, B. كما هو موضّح في الشكل.



a) ما المسافة التقريبية z بين الصقر والأرنب B؟

b) ما البعد بين الأرنبين؟

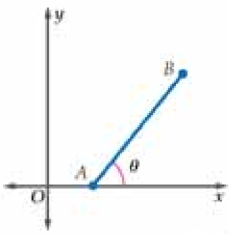
في $\triangle ABC$، $\angle C$ زاوية قائمة. استعمل القيم المعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في $\triangle ABC$. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

47) $m\angle A = 36°, a = 12$ **48)** $m\angle B = 31°, b = 19$

49) $a = 8, c = 17$ **50)** $\tan A = \frac{4}{5},\ a = 6$

مسائل مهارات التفكير العليا

51) **تحدٍّ:** قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين $A(2, 0), B(6, 5)$ كما هو موضح في الشكل إلى اليسار، ما قياس الزاوية الحادة θ المحصورة بين القطعة المستقيمة والمحور x؟ وضّح كيف وجدت القياس.



52) **تبرير:** بيّن إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرر إجابتك:
قيمة دالة الجيب لأية زاوية حادة، لن تكون سالبة أبدًا.

53) **إجابة مفتوحة:** في المثلث القائم الزاوية ABC، إذا علمت أن: $\sin A = \sin C$. فماذا يمكن أن تستنتج عن هذا المثلث؟ برر إجابتك.

تدريب على اختبار

54) إذا كان ثمن شطيرة x ريال، وثمن علبة عصير y ريال، وثمن شطيرتين مع علبة عصير 4.50 ريالات، وثمن ثلاث شطائر مع علبتي عصير 7.25 ريالات فأي المصفوفات الآتية يمكن ضربها في المصفوفة $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة كل من x, y؟

A $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

55) نسبة طول مستطيل إلى عرضه هي 12:5 . إذا كانت مساحة المستطيل $240\ cm^2$، فكم سنتمترًا طول قطر المستطيل؟

A 26 **C** 30

B 28 **D** 32

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 5-1)

56) $\frac{15a^2b^2}{21ac} \cdot \frac{14a^4c^2}{6ab^3}$ **57)** $\frac{14c^2f^5}{9a^2} \div \frac{35cf^4}{18ab^3}$ **58)** $\frac{3a^2+6a+3}{a^2-3a-10} \div \frac{12a^2-12}{a^2-4}$

أوجد مجموع كل متسلسلة مما يأتي:

59) $3 + 8 + 13 \ldots + 58$ (الدرس 6-2) **60)** $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$ (الدرس 6-4)

8-2 الزوايا وقياساتها
Angles and Angle Measure

فيما سبق:
درست استعمال الزوايا المقاسة بالدرجات

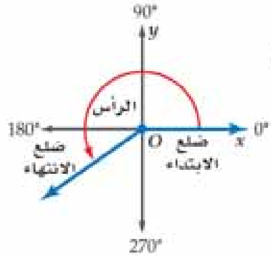
والآن:
- أرسم زوايا في الوضع القياسي وأجد قياساتها.
- أحوّل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

المفردات:
- الوضع القياسي standard position
- ضلع الابتداء initial side
- ضلع الانتهاء terminal side
- الراديان radian
- الزاوية المركزية central angle

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

المزولة (الساعة الشمسية)، أداة تُحدّد الوقت من النهار من خلال الظل الذي تسقطه على سطح مدرج لإظهار الساعة أو أجزاء من الساعة. ويدور الظل على القرص °15 كل ساعة.



الزوايا المرسومة في الوضع القياسي تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي** إذا كان رأسها نقطة الأصل وأحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب من المحور x.

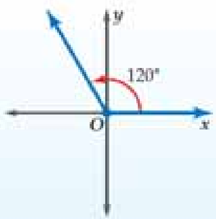
- يُسمّى الضلع المنطبق على المحور x **ضلع الابتداء** للزاوية.
- يُسمّى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل **ضلع الانتهاء**.

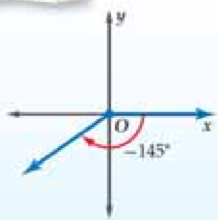
مفهوم أساسي — قياسات الزوايا

أضف إلى مطويتك

إذا كان قياس زاوية موجبًا، يكون ضلع الانتهاء قد دار بعكس حركة عقارب الساعة.

وإذا كان قياس زاوية سالبًا، يكون ضلع الانتهاء قد دار مع حركة عقارب الساعة.



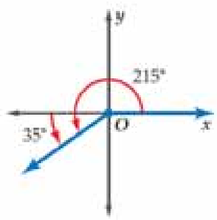


مثال 1 — رسم زاوية في الوضع القياسي

ارسم كلًّا من الزاويتين المعطى قياسها فيما يأتي في الوضع القياسي:

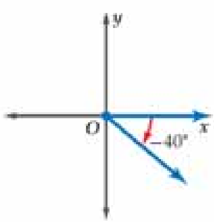
a) $215°$ $\quad 215° = 180° + 35°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية °35 بدوران معاكس لحركة عقارب الساعة بدءًا من الجزء السالب من المحور x.



b) $-40°$

قياس الزاوية سالب. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية °40 بدوران مع حركة عقارب الساعة بدءًا من الجزء الموجب من المحور x

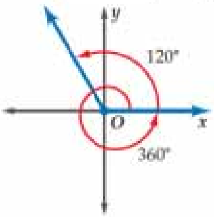


تحقق من فهمك

ارسم كلًّا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

1A) $80°$ $\qquad$ **1B)** $-105°$

الزاوية 480°



يمكن لضلع الانتهاء لزاوية أن يدور أكثر من دورة كاملة واحدة. فعلى سبيل المثال دورة كاملة مقدارها 360° إضافة إلى دورة بمقدار 120° تشكّلان زاوية قياسها

$$360^\circ + 120^\circ = 480^\circ$$

الربط مع الحياة

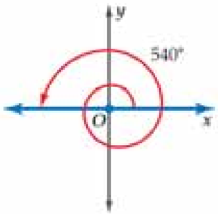
التزلج المائي رياضة يضع فيها المتزلج زلاجة من الزجاج الليفي، أو من أنواع مختلفة من الخشب في قدميه، ويتم سحبه فوق الماء بوساطة زورق ذي محرك سريع.

مثال 2 من واقع الحياة: رسم زاوية في الوضع القياسي

التزلج المائي: يتضمّن التزلج المائي، أن يقوم المتزلج بالمناورة من خلال الدوران في الهواء أثناء تنفيذه هذه الرياضة. إذا تضمّنت إحدى المناورات الدوران بمقدار 540° في الهواء، فارسم زاوية قياسها 540° في الوضع القياسي.

$$540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$$

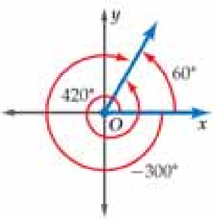
ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 180° بدءًا من الجزء الموجب من المحور x .



تحقق من فهمك

2) ارسم زاوية قياسها 600° في الوضع القياسي.

عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها: -300° ، 420° ، 60° كما هو موضّح في الشكل المجاور.



يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات 360°.

- $60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$
- $60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$

مثال 3: إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة:

a) 130°

زاوية بقياس موجب: $130^\circ + 360^\circ = 490^\circ$ — بإضافة 360°

زاوية بقياس سالب: $130^\circ - 360^\circ = -230^\circ$ — بطرح 360°

b) -200°

زاوية بقياس موجب: $-200^\circ + 360^\circ = 160^\circ$ — بإضافة 360°

زاوية بقياس سالب: $-200^\circ - 360^\circ = -560^\circ$ — بطرح 360°

تحقق من فهمك

3A) 15° **3B)** -45°

قراءة الرياضيات

زاوية الدوران

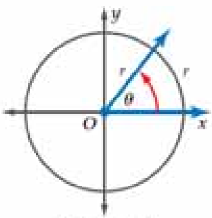
في حساب المثلثات، يشار إلى الزاوية أحيانًا بزاوية الدوران.

إرشادات للدراسة

القياس بالراديان
كما في القياس بالدرجات، فإن القياس بالراديان يقيس مقدار الدوران من ضلع الابتداء حتى ضلع الانتهاء.

- قياس زاوية بالراديان يكون موجبا إذا كان الدوران بعكس حركة عقارب الساعة.
- قياس زاوية بالراديان يكون سالبًا إذا كان الدوران مع حركة عقارب الساعة.

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس يمكن أن تقاس الزوايا أيضًا بوحدات تستند على طول قوس من دائرة. 1 **راديان** (Rad) هو قياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، والتي تحدد على الدائرة قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة.



$\theta = 1$ راديان

محيط الدائرة يساوي $2\pi r$. لذلك فالدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان. وبما أن $2\pi \text{ Rad} = 360°$، فإن العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان كما يأتي:

$$2\pi \text{ Rad} = 360° \qquad \pi \text{ Rad} = 180°$$

مفهوم أساسي — التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

أضف إلى مطويتك

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$

قراءة الرياضيات

القياس بالراديان
كلمة راديان تحذف عادة عندما يتم التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان. ومن هنا فعندما لا نضع وحدة لقياس معطى لزاوية تكون الوحدة هي الراديان.

مثال 4 التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات:

a) $-30°$

$$-30° = -30° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$$
$$= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

b) $\frac{5\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{180°}{\cancel{\pi \text{ rad}}}$$
$$= \frac{900°}{2} = 450°$$

تحقق من فهمك

حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات:

4A) $120°$

4B) $-\frac{3\pi}{8}$

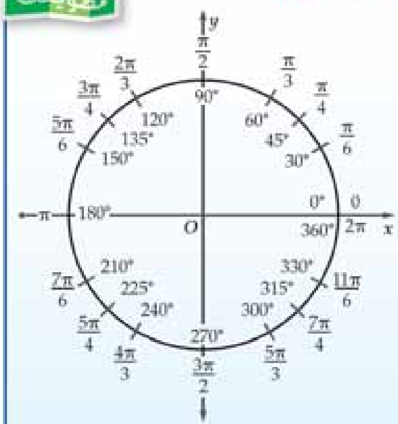
ملخص المفهوم — القياس بالدرجات وبالراديان

أضف إلى مطويتك

يُظهِر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزاويا.

$$30° = \frac{\pi}{6} \qquad 45° = \frac{\pi}{4}$$
$$60° = \frac{\pi}{3} \qquad 90° = \frac{\pi}{2}$$



الزاوية المركزية في دائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة. إذا علمت قياس الزاوية المركزية وطول نصف قطر الدائرة، فإنك تستطيع أن تجد طول القوس المقابل لها.

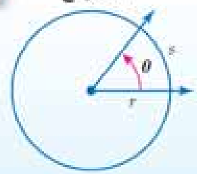
مفهوم أساسي — طول القوس

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **طول القوس** من الدائرة (s)، المقابل لزاوية مركزية قياسها (θ) يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ.

الرموز: $s = r\theta$

النموذج



سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال 47

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد طول القوس

شاحنات: طول نصف قطر إطارات شاحنة 33 in. ما المسافة بالقدم التي تقطعها الشاحنة بعد أن تدور إطاراتها ثلاثة أرباع دورة؟

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

$\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ قياس الزاوية هو $\frac{3}{4}$ الدورة الكاملة

الخطوة 2: استعمل طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

$s = r\theta$ صيغة طول القوس

$= 33 \cdot \frac{3\pi}{2}$ بالتعويض من r بـ 33 و θ بـ $\frac{3\pi}{2}$

≈ 155.5 in باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

≈ 13.0 ft بالقسمة على 12 للتحويل إلى وحدة القدم

إذًا الشاحنة قطعت مسافة 13 ft تقريبًا بعد دوران إطاراتها ثلاثة أرباع دورة.

تنبيه

طول القوس تذكر أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجات عندما تحسب طول القوس. وتذكر أيضًا أن الدورة الكاملة تساوي 2π راديان.

تحقق من فهمك

5) إذا كان طول قطر دائرة 9 cm، فأوجد طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله 60°. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

تأكد

المثالان 1, 2 ارسم كلًّا من الزوايا المعطى قياسها في الوضع القياسي:

1) 140° 2) −60° 3) 390°

مثال 3 في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة:

4) 25° 5) 175° 6) −100°

مثال 4 حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

7) $\frac{\pi}{4}$ 8) 225° 9) −40°

مثال 5 10) **تنس طاولة:** تحرك لاعب تنس طاولة في مسار على شكل قوس من دائرة. إذا كان طول نصف قطر دائرته هو 1.2 m، وزاوية دوران اللاعب تساوي 100°. فما طول هذا القوس؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 ارسم كلًّا من الزوايا المعطى قياسها في الوضع القياسي:

11) $75°$ 12) $160°$ 13) $-90°$

14) $-120°$ 15) $295°$ 16) $510°$

17) **جمباز:** يتأرجح لاعب جمباز على جهاز عارضين، ليدور بزاوية قياسها $240°$. ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.

مثال 3 في كل مما يأتي . أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة:

18) $50°$ 19) $95°$ 20) $205°$

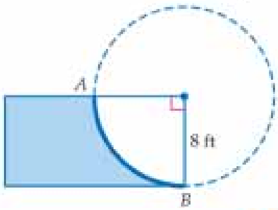
21) $350°$ 22) $-80°$ 23) $-195°$

مثال 4 حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان ، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

24) $330°$ 25) $\frac{5\pi}{6}$ 26) $-\frac{\pi}{3}$

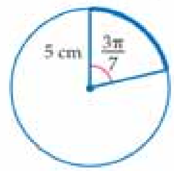
27) $-50°$ 28) $190°$ 29) $-\frac{7\pi}{3}$

مثال 5 30) أوجد طول القوس المحدد في الشكل المجاور.

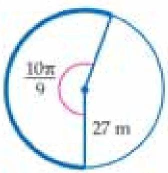


أوجد طول القوس المحدد في كلٍّ من الدائرتين الآتيتين، مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

31)



32)



33) **ساعات:** كم من الوقت يستغرق عقرب الدقائق في ساعة ليدور بزاوية قياسها 2.5π راديان؟

34) **المزولة:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية هذا الدرس. يدور الظل على القرص $15°$ كل ساعة.

a) بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟

b) ما قياس الزاوية بالراديان التي يدورها الظل بعد مرور 5 ساعات؟

c) مزولة طول نصف قطرها 8 in ، ما طول القوس الذي يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور 14 ساعة؟ قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة.

الربط مع الحياة

استعملت المزولة قديمًا في المسجد الأقصى للتعرف إلى أوقات الصلاة.

في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحدهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة:

35) $620°$ 36) $-400°$ 37) $-\frac{3\pi}{4}$ 38) $\frac{19\pi}{6}$

39) **تمثيلات متعددة:** لديك النقطتين $C(6, 0), D(6, 8)$.

a) **هندسيًا:** ارسم المثلث: $\triangle ECD$ حيث E هي نقطة الأصل.

b) **جبريًا:** أوجد ظل: $\angle CED$.

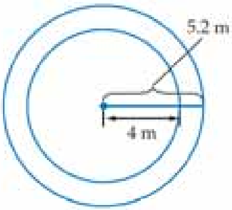
c) **جبريًا:** أوجد ميل: $\overline{ED}$.

d) **لفظيًا:** ما العلاقة التي تستطيع استنتاجها بين الميل وظل الزاوية؟

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

40) $\frac{21\pi}{8}$ 41) $124°$ 42) $-200°$ 46) 5

43) **أحصنة دوارة:** في مدينة ألعاب، تدور لعبة الأحصنة في دائرتين، الأولى داخلية طول نصف قطرها 4 m والثانية خارجية طول نصف قطرها 5.2 m. إذا كانت الأحصنة تدور 5 دورات في الدقيقة، فاعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن السؤالين الآتيين:

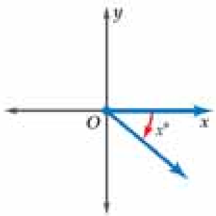


a) أوجد قياس الزاوية θ بالراديان التي يدورها حصان في ثانية واحدة.

b) كم يزيد طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الخارجية على طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الداخلية، وذلك بعد مرور ثانية واحدة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **اكتشف الخطأ:** كتب كل من علي وأحمد عبارة تُمثّل قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الظاهرة في الشكل المجاور. من منهما إجابته صحيحة؟ وضّح إجابتك.



علي	أحمد
$(x - 360)°$	$(360 - x)°$

45) **تحدٍّ:** مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع الجزء الموجب من المحور x عند النقطة $(2, 0)$. أوجد معادلة هذا المستقيم.

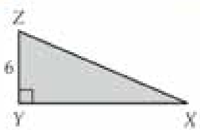
46) **مسألة مفتوحة:** ارسم زاوية حادة في الوضع القياسي وسمِّها. وأوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب بحيث تكونان مشتركتين في ضلع الانتهاء مع هذه الزاوية.

47) **تبرير:** برهن صيغة طول القوس المقابل للزاوية المركزية.

تدريب على اختبار

48) إذا كان $(x+6)(x+8) - (x-7)(x-5) = 0$، فأوجد قيمة x.

49) **هندسة:** إذا كانت مساحة المثلث المجاور 60 وحدة مربعة. فما طول الضلع $\overline{XZ}$؟

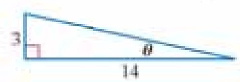


A $2\sqrt{34}$ B $4\sqrt{109}$ C $2\sqrt{109}$ D $4\sqrt{34}$

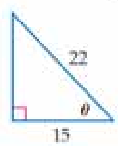
مراجعة تراكمية

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي: (الدرس 8-1)

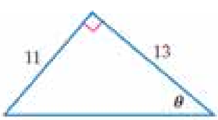
50)



51)



52)



حُل كل معادلة مما يأتي: (الدرس 5-6)

53) $a + 1 = \frac{6}{a}$ 54) $\frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4}$ 55) $\frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1}$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر في المثلثات القائمة الزاوية التي طول كل من ساقيها كما يأتي: (مهارة سابقة)

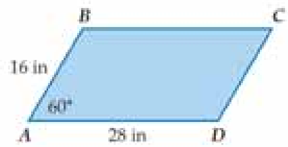
56) $a = 12, b = 15$ 57) $a = 8, b = 17$ 58) $a = 14, b = 11$

مساحة متوازي الأضلاع
Area of Parallelogram

يمكن إيجاد مساحة أي مثلث، باستعمال الجيب. وكذلك يمكن استعمال الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

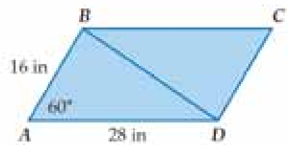
نشاط

أوجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.



الخطوة 1، ارسم القطر $\overline{BD}$.

يقسم القطر $\overline{BD}$ متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين هما: $\triangle ABD, \triangle CDB$.



الخطوة 2، أوجد مساحة $\triangle ABD$.

المساحة $= \frac{1}{2}(AB)(AD)\sin A$	صيغة مساحة المثلث
$= \frac{1}{2}(16)(28)\sin 60°$	$AB = 16, AD = 28, A = 60°$
$= 224\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	بالضرب وتعويض قيمة $\sin 60°$
$= 112\sqrt{3}$	بالتبسيط

الخطوة 3، أوجد مساحة $\square ABCD$.

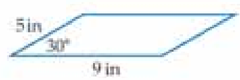
مساحة $\square ABCD$ تساوي مجموع مساحتي المثلثين: $\triangle ABD , \triangle CDB$.

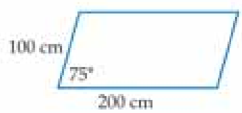
وبما أن $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ، فإن مساحة $\triangle CDB$ تساوي مساحة $\triangle ABD$. لذا فإن مساحة $\square ABCD$ تساوي مثلي مساحة $\triangle ABD$.

$$2 \cdot 112\sqrt{3} = 224\sqrt{3} \approx 387.98 \text{ in}^2$$

تمارين،

(1


(2


(3


أوجد كلًّا ممّا يأتي لكل متوازي أضلاع أعلاه:

a) المساحة.

b) المساحة عندما يصبح قياس الزاوية المعلومة نصف القياس المُعطى.

c) المساحة عندما يكون قياس الزاوية المعلومة مثلي القياس المُعطى.

8-3 الدوال المثلثية للزوايا
Trigonometric Functions of General Angles

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة.

والآن:

- أجد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
- أجد قيم الدوال المثلثية باستعمال زوايا مرجعية.

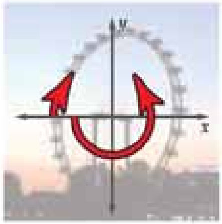
المفردات:

الزاوية الربعية
quadrantal angle

الزاوية المرجعية
reference angle

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



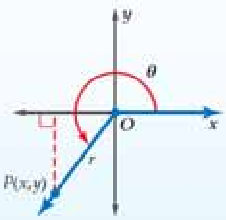
تنتشر العجلة الدوارة في كبريات مدن الألعاب، ويمكننا إيجاد ارتفاع إحدى عرباتها في لحظة معينة عندما تدور العجلة بزاوية أكبر من $90°$.

الدوال المثلثية للزوايا: يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية لزوايا قياساتها تزيد عن $90°$ أو تقل عن $0°$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الدوال المثلثية للزوايا

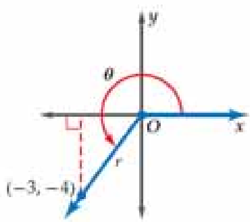


لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r ، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

مثال 1 إيجاد قيم الدوال المثلثية بمعلومية نقطة



إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-3, -4)$. فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ.

الخطوة 1: ارسم الزاوية وأوجد قيمة r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

الخطوة 2: استعمل $x = -3, y = -4, r = 5$ لكتابة النسب المثلثية الست.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-6, 2)$. فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ.

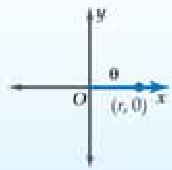
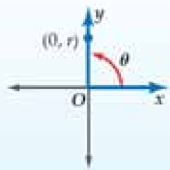
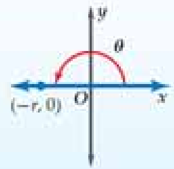
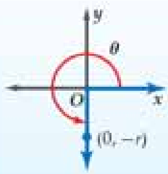
إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن الزاوية θ تُسمّى **زاوية ربعية**.

إرشادات للدراسة

الزوايا الربعية
قياس أي زاوية ربعية هو من مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

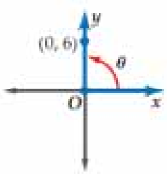
مفهوم أساسي — الزوايا الربعية

أضف إلى مطويتك

$\theta = 0°$ أو $\theta = 0\ rad$	$\theta = 90°$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}\ rad$	$\theta = 180°$ أو $\theta = \pi\ rad$	$\theta = 270°$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}\ rad$
			

مثال 2 الزوايا الربعية

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(0, 6)$. فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ.



تقع النقطة $(0, 6)$ على الجزء الموجب من المحور y، لذلك فإن قياس الزاوية الربعية θ يساوي $90°$. استعمل $x = 0, y = 6, r = 6$ لكتابة النسب المثلثية.

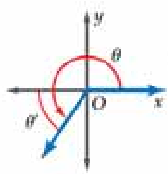
$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = 0$ $\quad$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \cancel{\frac{6}{0}}$ (غير معرفة)

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \cancel{\frac{6}{0}}$ (غير معرّفة) $\quad$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = 0$

تحقق من فهمك

2) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-2, 0)$، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ.

الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي فإن **زاويتها المرجعية** θ' هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. والجدول الآتي يُبيّن قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.

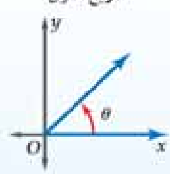
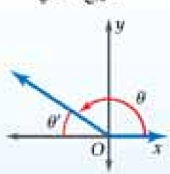
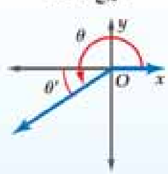
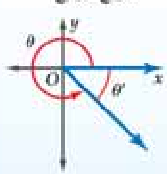


قراءة الرياضيات

الرمز θ'
θ' يقرأ: ثيتا برايم.

مفهوم أساسي — الزوايا المرجعية

أضف إلى مطويتك

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

إذا كان قياس الزاوية θ اكبر من $360°$ أو أقل من $0°$، فاستعمل زاوية بقياس موجب محصور بين $0°, 360°$ ومشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ لإيجاد الزاوية المرجعية للزاوية θ.

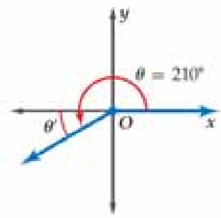
إرشادات للدراسة

رسم الزوايا في الوضع القياسي
يمكنك الرجوع إلى الشكل الموجود في ملخص المفهوم في الدرس 2-8 لمساعدتك على رسم الزوايا في الوضع القياسي.

مثال 3 إيجاد الزوايا المرجعية

ارسم كلًّا من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

a) $210°$

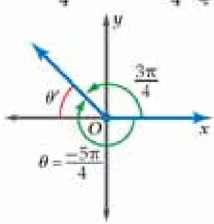


ضلع الانتهاء للزاوية $210°$ يقع في الربع الثالث.

$$\theta' = \theta - 180°$$
$$= 210° - 180° = 30°$$

b) $-\frac{5\pi}{4}$

الزاوية المشتركة مع الزاوية $-\frac{5\pi}{4}$ في ضلع الانتهاء هي: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$



ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{4}$ يقع في الربع الثاني.

$$\theta' = \pi - \theta = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

تحقق من فهمك

ارسم كلًّا من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

3A) $-110°$ **3B)** $\frac{2\pi}{3}$

لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ، يمكن استعمال الزوايا المرجعية وتحُدّد إشارة كل دالة حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ. وللقيام بذلك استعمل الخطوات أدناه.

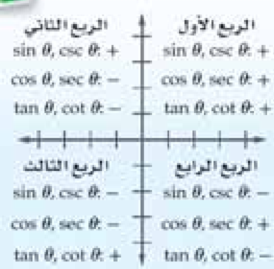
مفهوم أساسي إيجاد قيم الدوال المثلثية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ'.

الخطوة 3: حدّد إشارة قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .



يمكن استعمال قيم الدوال المثلثية للزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ التي تعلمتها في الدرس 1-8.

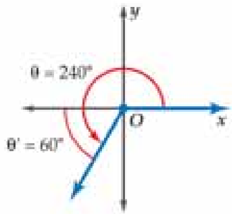
قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

الجيب	جيب التمام	الظل	قاطع التمام	القاطع	ظل التمام
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال 4 استعمال الزاوية المرجعية لإيجاد قيمة دالة مثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

a) $\cos 240°$



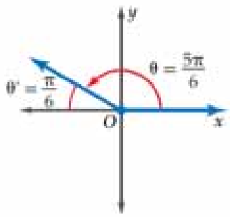
يقع ضلع الانتهاء للزاوية °240 في الربع الثالث.

$\theta' = \theta - 180°$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$= 240° - 180° = 60°$ $\theta = 240°$

$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ دالة جيب التمام سالبة في الربع الثالث

b) $\csc \frac{5\pi}{6}$



يقع ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني.

$\theta' = \pi - \theta$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$ دالة قاطع التمام موجبة في الربع الثاني

$= \csc 30°$ $\frac{\pi}{6}\text{ rad} = 30°$

$= 2$ $\csc 30° = \frac{1}{\sin 30}$

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

4A) $\cos 135°$

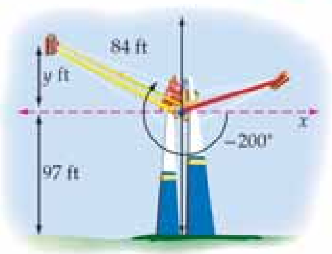
4B) $\tan \frac{5\pi}{6}$

الربط مع الحياة

في بعض أنواع الأراجيح الدوارة يشعر الراكب بانعدام الوزن في لحظة ما، حيث تصل سرعة الأرجوحة إلى 60 ميلاً في الساعة في كلا الاتجاهين.

مثال 5 من واقع الحياة استعمال الدوال المثلثية

أراجيح: إذا كان طول كل ذراع من أذرع الأرجوحة في الشكل المجاور 84 ft، وارتفاع محور الدوران 97 ft. أوجد الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون عندما يدور كما هو موضح في الشكل.



قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية °200− :

$-200° + 360° = 160°$

$180° - 160° = 20°$ قياس الزاوية المرجعية

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ دالة الجيب

$\sin 20° = \frac{y}{84}$ $\theta = 20°,\ r = 84$

$84 \sin 20° = y$ بضرب كلا الطرفين في 84

$28.7 \approx y$ باستعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة y

بما أن y تساوي 28.7 ft تقريبًا، فإن الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون هو 28.7 + 97 ويساوي 125.7 ft تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **أراجيح:** أوجد الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون في المثال 5 إذا كان طول هذا الذراع 72 ft، وارتفاع محور الدوران 88 ft وقياس زاوية الدوران °195−

تأكد

المثالان 2 ,1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بإحدى النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ :

1) $(1, 2)$ **2)** $(-8, -15)$ **3)** $(0, -4)$

مثال 3 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

4) $300°$ **5)** $115°$ **6)** $-\frac{3\pi}{4}$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

7) $\sin \frac{3\pi}{4}$ **8)** $\tan \frac{5\pi}{3}$ **9)** $\sec 120°$ **10)** $\sin 300°$

مثال 5 **11)** **تسلية :** فتح سعيد حاسوبه المحمول فشكّل زاوية قياسها $125°$ كما هو مبين في الشكل المجاور.

a) أعد رسم الشكل السابق في المستوى الإحداثي بحيث تكون الزاوية $125°$ مرسومة في الوضع القياسي.

b) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية $125°$ ، ثم اكتب دالة مثلثية يمكن استعمالها في إيجاد d.

c) استعمل هذه الدالة، لإيجاد قيمة d. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 ,1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، يمر بإحدى النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ.

12) $(5, 12)$ **13)** $(-6, 8)$ **14)** $(3, 0)$

15) $(0, -7)$ **16)** $(4, -2)$ **17)** $(-9, -3)$

مثال 3 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها.

18) $195°$ **19)** $285°$ **20)** $-250°$

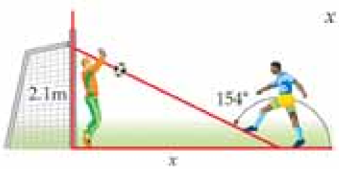
21) $\frac{7\pi}{4}$ **22)** $-\frac{\pi}{4}$ **23)** $400°$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

24) $\sin 210°$ **25)** $\tan 315°$ **26)** $\cos 150°$ **27)** $\csc 225°$

28) $\sin \frac{4\pi}{3}$ **29)** $\cos \frac{5\pi}{3}$ **30)** $\cot \frac{5\pi}{4}$ **31)** $\sec \frac{11\pi}{6}$

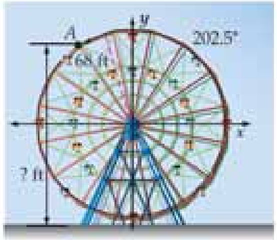
مثال 5 **32)** **كرة قدم:** يركل لاعب كرة قدم الكرة نحو الهدف من مسافة $x\,m$ عن حارس المرمى كما هو مبين في الشكل المجاور، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع 2.1 m من سطح الأرض.



a) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية $154°$. ثم اكتب دالة مثلثية يمكن استعمالها في إيجاد المسافة بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة.

b) كم المسافة التقريبية بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة؟

33) **عجلات دوارة:** في إحدى مدن الألعاب عجلة دوارة طول نصف قطرها 68 ft وترتفع عن سطح الأرض 15 ft. بعد جلوس الشخص في العربة السفلية تدور العجلة بزاوية قياسها $202.5°$ بعكس حركة عقارب الساعة قبل أن تتوقف. فكم يكون ارتفاع هذه العربة عن سطح الأرض عندما تتوقف العجلة عن الدوران؟



افرض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وقد أعطي فيما يأتي قيمة إحدى الدوال المثلثية للزاوية θ والربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها. أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الخمس الأخرى للزاوية θ.

34) $\sin\theta = \frac{4}{5}$، الربع الثاني

35) $\tan\theta = -\frac{2}{3}$، الربع الرابع

36) $\cos\theta = -\frac{8}{17}$، الربع الثالث

37) $\cot\theta = -\frac{12}{5}$، الربع الرابع

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

38) $\cot 270°$

39) $\csc 180°$

40) $\sin 570°$

41) $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

42) $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

43) $\cot\frac{9\pi}{4}$

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **تحدٍّ:** الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي حيث $\tan\theta = -1, \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. هل من الممكن أن يكون قياس الزاوية θ مساويًا لـ $225°$؟ وضح إجابتك.

45) **تبرير:** حدّد إذا كانت المعادلة: $3\sin 60° = \sin 180°$ صحيحة أم غير صحيحة. وضّح إجابتك.

46) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالًا على زاوية θ بقياس سالب بحيث: $\sin\theta > 0, \cos\theta < 0$.

47) **اكتب:** وضّح خطوات إيجاد قيمة دالة مثلثية لزاوية قياسها أكبر من $90°$. مضمّنًا ذلك وصفًا للزاوية المرجعية في هذه الخطوات.

تدريب على اختبار

48) إذا كان مجموع عددين 21 والفرق بينهما 3، فما ناتج ضربهما؟

49) ما المقدار الذي يكافئ المقدار: $(-6 + i)^2$؟

A $-12i$ **B** $36 - 12i$ **C** $36 - i$ **D** $35 - 12i$

مراجعة تراكمية

حوّل قياس كل زاوية فيما يأتي المكتوبة بالراديان إلى الدرجات: (الدرس 8-2)

50) $\frac{4}{3}\pi$

51) $\frac{11}{6}\pi$

52) $-\frac{17}{4}\pi$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية علمًا بأن جميع الزوايا حادة: (الدرس 8-1)

53) $\cos a = \frac{13}{17}$

54) $\sin 30 = \frac{b}{6}$

55) $\tan c = \frac{9}{4}$

أوجد قيمة x في كل مما يأتي: (الدرس 6-5)

56) $\frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9}$

57) $\frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4}$

58) $\frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20}$

8-4

قانون الجيوب
Law of Sines

فيما سبق:

درست إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية وقياسات زواياها.

والآن:

- أجد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أستعمل قانون الجيوب في حل المثلثات.

المفردات:

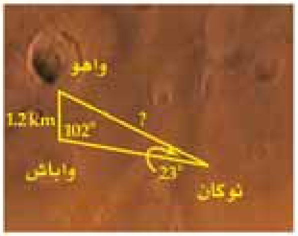
قانون الجيوب
Law of Sines

حل المثلث
solving a triangle

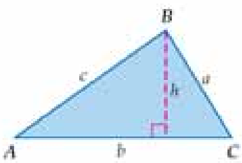
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يوجد على سطح كوكب المريخ عشرات الآلاف من الفوهات أو الحفر، وقد أطلق عليها العلماء تسميات عديدة لعلماء مشهورين وأسماء مدن ومؤلفي قصص علمية خيالية. الشكل المجاور يبين ثلاثاً من هذه الفوهات. يمكنك استعمال حساب المثلثات في إيجاد المسافة بين الفوهتين واهو و نوكان.



إيجاد مساحة المثلث: في المثلث المجاور $\sin A = \frac{h}{c}$ أي أنَّ $h = c \sin A$.



المساحة $= \frac{1}{2}bh$ صيغة مساحة المثلث

المساحة $= \frac{1}{2}b(c \sin A)$ بالتعويض عن h بـ $c \sin A$

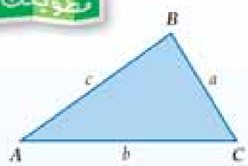
المساحة $= \frac{1}{2}bc \sin A$ بالتبسيط

يمكنك استعمال هذه الصيغة أو صيغتين أخريين لإيجاد مساحة مثلث، إذا كان معلومًا لديك طولا أي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مفهوم أساسي — **مساحة المثلث**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

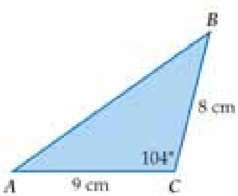


الرموز: المساحة $= \frac{1}{2}bc \sin A$ المساحة $= \frac{1}{2}ac \sin B$ المساحة $= \frac{1}{2}ab \sin C$

مثال 1 **إيجاد مساحة مثلث**

أوجد مساحة $\triangle ABC$ مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

$\triangle ABC$ فيه: $a = 8, b = 9, C = 104°$.



المساحة $= \frac{1}{2}ab \sin C$ صيغة مساحة المثلث

$= \frac{1}{2}(8)(9) \sin 104°$ بالتعويض

≈ 34.9 بالتبسيط

إذن المساحة تساوي $34.9\,cm^2$ تقريبًا

تحقق من فهمك

1) أوجد مساحة $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 31°, b = 18\,m, c = 22\,m$ مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

استعمال قانون الجيوب لحل المثلثات: يمكن استعمال الصيغ المختلفة لإيجاد مساحة المثلث في اشتقاق **قانون الجيوب**، الذي يُبيّن العلاقات بين أطوال أضلاع مثلث وجيوب الزوايا المقابلة لها.

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$ بكتابة صيغ مساحة المثلث الثلاث المتساوية

$$bc\sin A = ac\sin B = ab\sin C$$ بضرب كل عبارة في 2

$$\frac{bc\sin A}{abc} = \frac{ac\sin B}{abc} = \frac{ab\sin C}{abc}$$ بقسمة كل عبارة على abc

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$ بالتبسيط

مفهوم أساسي

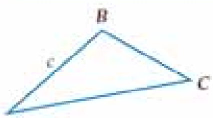
أضف إلى مطويتك

قانون الجيوب

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

يمكنك استعمال قانون الجيوب لحل المثلث في الحالات الآتية:



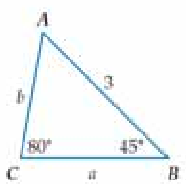
- معرفة قياسي زاويتين في المثلث وطول أي ضلع فيه
(زاوية - زاوية - ضلع (حالة AAS)، أو زاوية - ضلع - زاوية (حالة ASA))

- معرفة طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما
(ضلع - ضلع - زاوية (حالة SSA))

حل المثلث يعني استعمال القياسات المعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلث وقياس زواياه.

مثال 2 حل مثلث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

حُلّ $\triangle ABC$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.



الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle A = 180 - (80 + 45) = 55°$$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد كل من الطولين: a, b.
اكتب معادلة لإيجاد قيمة كل منهما.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$	قانون الجيوب	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
$\frac{\sin 55°}{a} = \frac{\sin 80°}{3}$	بالتعويض	$\frac{\sin 45°}{b} = \frac{\sin 80°}{3}$
$a = \frac{3\sin 55°}{\sin 80°}$	بالحل بالنسبة لكل متغير	$b = \frac{3\sin 45°}{\sin 80°}$
$a \approx 2.5$	باستعمال الآلة الحاسبة	$b \approx 2.2$

إذن، $A = 55°, a \approx 2.5, b \approx 2.2$.

تحقق من فهمك

2) حُلّ $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 42°, Q = 65°, n = 5$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

إرشادات للدراسة

علاقات بديلة

يمكن كتابة قانون الجيوب كما يأتي:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

وبذلك يمكنك استعمال العلاقتين الآتيتين لحل المثلث في المثال 2.

- $\frac{a}{\sin 55°} = \frac{3}{\sin 80°}$
- $\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 80°}$

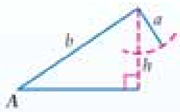
إذا كان معلومًا لدينا قياسا زاويتين وطول أحد الأضلاع فإنه يوجد مثلث وحيد في هذه الحالة. أما في حالة معلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA)، فإن عدد المثلثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلث حلّ، أو له حلٌّ واحد، أو له حلان.

مفهوم أساسي — المثلثات الممكنة في حالة (SSA)

أضف إلى مطويتك

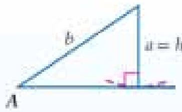
افترض مثلثًا معلومًا فيه: $m\angle A,\ a,\ b$

$\angle A$ حادة



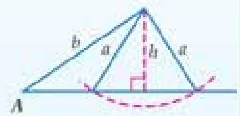
$a < h$

لا يوجد حل



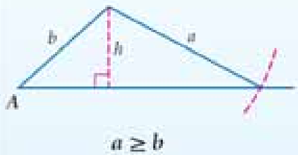
$a = h$

حل واحد



$h < a < b$

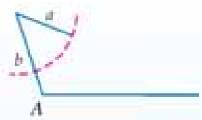
حلان



$a \geq b$

حل واحد

$\angle A$ قائمة أو منفرجة



$a \leq b$

لا يوجد حل

$a > b$

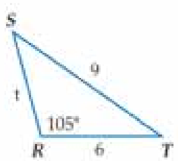
حل واحد

بما أن $\sin A = \frac{h}{b}$، فيمكنك استعمال الصيغة $h = b \sin A$ لإيجاد قيمة h في المثلثات الحادة الزوايا.

مثال 3 حل مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدد إن كان لكل مثلث مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقربًا أطول الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

a) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 105°,\ r = 9,\ s = 6$.



بما أن $\angle R$ منفرجة، و $9 > 6$، نستنتج أن للمثلث حلًا واحدًا.

الخطوة 1: استعمل قانون الجيوب لإيجاد $m\angle S$.

$$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105°}{9}$$ قانون الجيوب

$$\sin S = \frac{6 \sin 105°}{9}$$ بضرب كلا الطرفين في 6

$$\sin S \approx 0.6440$$ باستعمال الآلة الحاسبة

$$S \approx 40°$$ بإيجاد قيمة $\sin^{-1} 0.6440$

الخطوة 2: أوجد $m\angle T$.

$$m\angle T \approx 180 - (105 + 40) \approx 35°$$

الخطوة 3: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قيمة t.

$$\frac{\sin 35°}{t} \approx \frac{\sin 105°}{9}$$ قانون الجيوب

$$t \approx \frac{9 \sin 35°}{\sin 105°}$$ بالحل بالنسبة لـ t

$$t \approx 5.3$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: $S \approx 40°,\ T \approx 35°,\ t \approx 5.3$.

إرشادات للدراسة

حلان: الحالة التي يكون للمثلث فيها حلان تُسمى الحالة المبهمة.

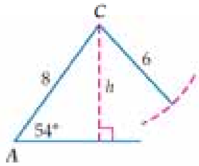
إرشادات للدراسة

الزاوية A حادة في الجهة اليمنى من الأشكال المجاورة. الارتفاع h يقارن مع a لأن h هو أقصر بُعد من C إلى $\overline{AB}$ عندما تكون الزاوية A حادة.

$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin A = \frac{h}{b}$$

b) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 54°, a = 6, b = 8$.



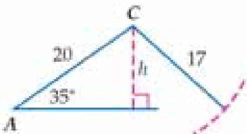
بما أن $\angle A$ حادة، و $8 > 6$، فأوجد قيمة h وقارنها مع قيمة a.

$h = b \sin A = 8 \sin 54°$ — $b = 8, A = 54°$

≈ 6.5 — باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن $6 < 6.5$ أو $a < h$ فلا يوجد للمثلث حل.

c) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 35°, a = 17, b = 20$.



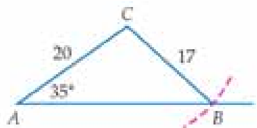
بما أن $\angle A$ حادة، و $20 > 17$، فأوجد قيمة h وقارنها مع قيمة a.

$h = b \sin A = 20 \sin 35°$ — $b = 20, A = 35°$

≈ 11.5 — باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن $20 > 17 > 11.5$ أو $h < a < b$. فإن للمثلث حلين وبالتالي هناك مثلثان يطلب حلهما.

الحالة 1: $\angle B$ حادة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

$\frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35°}{17}$ — قانون الجيوب

$\sin B = \frac{20 \sin 35°}{17}$ — بالحل بالنسبة لـ $\sin B$

$\sin B \approx 0.6748$ — باستعمال الآلة الحاسبة

$B \approx 42°$ — بإيجاد قيمة $\sin^{-1} 0.6748$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180 - (35 + 42) \approx 103°$

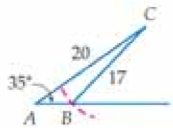
الخطوة 3: أوجد قيمة c .

$\frac{\sin 103°}{c} \approx \frac{\sin 35°}{17}$ — قانون الجيوب

$c \approx \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$ — بالحل بالنسبة لـ c

$c \approx 28.9$ — بالتبسيط

الحالة 2: $\angle B$ منفرجة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

قيمة دالة الجيب موجبة في الربع الثاني، لذا أوجد زاوية منفرجة B بحيث $\sin B \approx 0.6748$.

$m\angle B \approx 180° - 42° \approx 138°$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180 - (35 + 138) \approx 7°$

الخطوة 3: أوجد قيمة c .

$\frac{\sin 7°}{c} \approx \frac{\sin 35°}{17}$ — قانون الجيوب

$c \approx \frac{17 \sin 7°}{\sin 35°}$ — بالحل بالنسبة لـ c

$c \approx 3.6$ — بالتبسيط

لذا فإن أحد الحلين هو: $B \approx 42°, C \approx 103°, c \approx 28.9$، و الحل الثاني هو: $B \approx 138°, C \approx 7°, c \approx 3.6$.

إرشادات للدراسة

الزاوية المرجعية

في الحالة الثانية استعملت زاوية مرجعية قياسها $42°$ لإيجاد القياس الآخر للزاوية B .

تحقق من فهمك

حدد إن كان لكل مثلث مما يأتي حل واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3A) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 95°, r = 10, s = 12$

3B) $\triangle MNP$ الذي فيه: $N = 32°, n = 7, p = 4$

3C) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 47°, a = 15, b = 18$

الربط مع الحياة

يتراوح طول ملعب كرة القدم بين 90m-120m وعرضه بين 45m-90m . ومن الملاعب الرئيسة في المملكة العربية السعودية استاد الملك فهد الدولي بالرياض الذي يتسع لـ 75 ألف متفرج .

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال قانون الجيوب لحل مسألة

كرة قدم، يُمثّل الشكل المجاور ثلاثة لاعبين من فريق كرة قدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث.

$\frac{\sin 72^\circ}{90} = \frac{\sin 43^\circ}{x}$	قانون الجيوب
$x \sin 72^\circ = 90 \sin 43^\circ$	باستعمال الضرب التبادلي
$x = \frac{90 \sin 43^\circ}{\sin 72^\circ}$	بالحل بالنسبة لـ x
$x \approx 64.5$	باستعمال الآلة الحاسبة

إذن المسافة بين اللاعبين تساوي 64.5 ft تقريبًا.

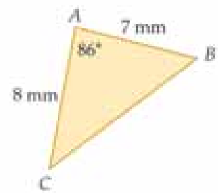
تحقق من فهمك

4) أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني.

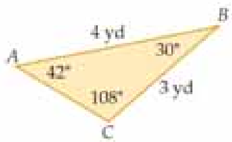
تأكد

مثال 1 في الأسئلة (1-4)، أوجد مساحة $\triangle ABC$ ، مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

1)



2)

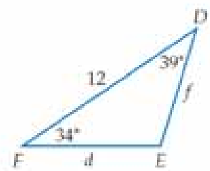


3) $A = 40^\circ, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

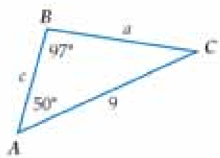
4) $B = 103^\circ, a = 20 \text{ in}, c = 18 \text{ in}$

مثال 2 (في الأسئلة 5-7)، حل كل مثلث. قرّب أط"ال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة:

5)



6)



7) $\triangle FGH$ الذي فيه: $G = 80^\circ, H = 40^\circ, g = 14$.

مثال 3 حدد إن كان للمثلث ABC في كل مما يأتي حل واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

8) $A = 95^\circ, a = 19, b = 12$

9) $A = 60^\circ, a = 15, b = 24$

10) $A = 34^\circ, a = 8, b = 13$

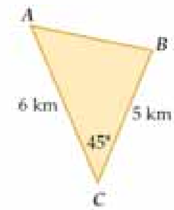
11) $A = 30^\circ, a = 3, b = 6$

مثال 4 12) **فضاء،** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين فوهة واهو وفوهة نوكان.

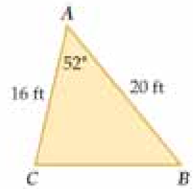
تدرب وحل المسائل

مثال 1 (في الأسئلة 19-13)، أوجد مساحة كل من المثلثات الآتية إلى أقرب جزء من عشرة:

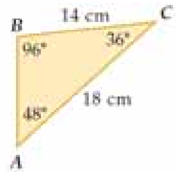
13)



14)



15)



16) $C = 25°, a = 4 \text{ ft}, b = 7 \text{ ft}$

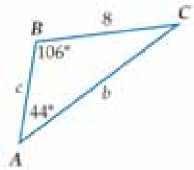
17) $A = 138°, b = 10 \text{ in}, c = 20 \text{ in}$

18) $B = 92°, a = 14.5 \text{ m}, c = 9 \text{ m}$

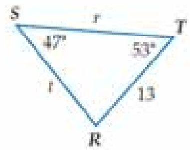
19) $C = 116°, a = 2.7 \text{ cm}, b = 4.6 \text{ cm}$

مثال 2 (في الأسئلة 26-20)، حُلّ كل مثلث. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

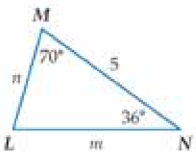
20)



21)



22)



23) $\triangle HJK$ الذي فيه: $H = 53°,\ J = 20°,\ h = 31$.

24) $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 109°,\ Q = 57°,\ n = 22$.

25) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 50°,\ a = 2.5,\ C = 67°$.

26) $\triangle ABC$ الذي فيه: $B = 18°,\ C = 142°,\ b = 20$.

مثال 3 حدد إن كان للمثلث ABC في كل مما يأتي حل واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

27) $A = 100°, a = 7, b = 3$

28) $A = 75°, a = 14, b = 11$

29) $A = 38°, a = 21, b = 18$

30) $A = 52°, a = 9, b = 20$

31) $A = 42°, a = 5, b = 6$

32) $A = 44°, a = 14, b = 19$

33) $A = 131°, a = 15, b = 32$

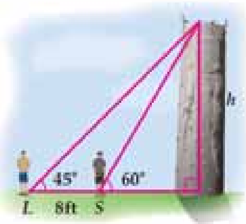
34) $A = 30°, a = 17, b = 34$

مثال 4 **جغرافيا:** في الشكل المجاور ثلاثة مواقع جغرافية تشكل مثلثًا. إذا كانت المسافة بين الرياض والدوادمي 236 km، وبين الرياض والزلفي 262 km ، وقياس الزاوية عند الدوادمي °72 .

35) أوجد قياس الزاوية عند مدينة الرياض.

36) أوجد المسافة بين الزلفي والدوادمي.

37) **تسلق:** يقف خالد و سعيد أمام جدار صخري للتسلق والمسافة بينهما 8 أقدام كما هو مبيّن في الشكل المجاور. ما ارتفاع الجدار الصخري؟ قرب إلى أقرب قدم.

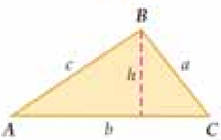


مسائل مهارات التفكير العليا

38) **اكتشف الخطأ:** $\triangle RST$ فيه: $R = 56°, r = 24, t = 12$. فإذا حاول كل من رضوان وعلي إيجاد $m\angle T$. فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

علي	رضوان
بما أن $r > t$ لا يوجد للمثلث حل.	$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56°}{24}$ $\sin T \approx 0.4145$ $T \approx 24.5°$

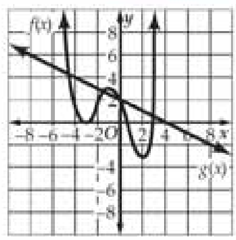
39) **تحدٍّ:** معتمدًا على الشكل المجاور، أثبت أن مساحة المثلث $\triangle ABC$ تعطى بالصيغة: $\frac{1}{2}bc \sin A$



40) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت $R = 62°$, $d = 38$، فأوجد قيمة لـ r بحيث لا يوجد للمثلث DRF حل عندها . ووضح إجابتك.

تدريب على اختبار

41) **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور التمثيل البياني لكلٍّ من $f(x)$, $g(x)$. ما قيمة $f(g(4))$؟



42) إذا كان أحد أصفار الدالة $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ هو 4. فأيٌّ مما يأتي يُمثّل تحليلًا للعبارة: $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$؟

A $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$

B $(x - 6)(x + 3)(x - 4)$

C $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$

D $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي: (الدرس 3-8)

43) $\sin 210°$　　44) $\cos \frac{3}{4}\pi$　　45) $\cot 60°$

في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة: (الدرس 2-8)

46) $125°$　　47) $-32°$　　48) $\frac{2}{3}\pi$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية (إن وجد): (الدرس 4-6)

49) $64 + 48 + 36 + \ldots$　　50) $27 + 36 + 48 + \ldots$　　51) $\sum_{n=1}^{\infty} 0.5(1.1)^n$

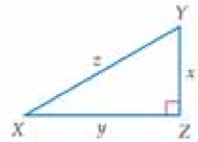
إذا كانت $w = 6, x = -4, y = 1.5, z = \frac{3}{4}$، فأوجد قيمة كل عبارة ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

52) $w^2 + y^2 - 6xz$　　53) $x^2 + z^2 + 5wy$　　54) $wy + xz + w^2 - x^2$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-8 إلى 4-8

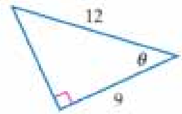
حُلّ $\triangle XYZ$ في كل من السؤالين: 2 ,1 وفق القياسات المعطاة قرِّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



1) $Y = 65°, x = 16$

2) $X = 25°, x = 8$

3) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ



4) ارسم زاوية قياسها $-80°$ في الوضع القياسي.

حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

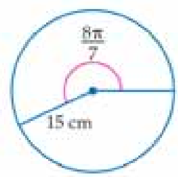
5) $215°$

6) $-350°$

7) $\frac{8\pi}{5}$

8) $\frac{9\pi}{2}$

9) **اختيار من متعدد:** طول القوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة أدناه مقرَّبًا إلى أقرب جزء من عشرة يساوي:



A 4.2 cm

B 17.1 cm

C 53.9 cm

D 2638.9 cm

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

10) $\tan \pi$

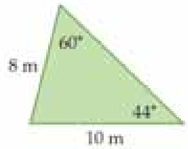
11) $\cos \frac{3\pi}{4}$

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بإحدى النقطتين الآتيتين في كل مرة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ:

12) $(0, -5)$

13) $(6, 8)$

14) **حديقة:** عند فيصل حديقة مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه. ما مساحة الحديقة؟



حدِّد إن كان للمثلث ABC في كل مما يأتي حل واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

15) $A = 38°, a = 18, c = 25$

16) $A = 65°, a = 5, b = 7$

17) $A = 115°, a = 12, b = 8$

في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة:

18) $240°$

19) $\frac{9\pi}{4}$

20) $-\frac{\pi}{4}$

21) **اختيار من متعدد:** افرض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث $\cos \theta > 0$. في أي ربع يقع ضلع الانتهاء للزاوية θ؟

A الربع الأول

B الربع الثالث

C الربع الثاني

D الربع الأول أو الربع الرابع

8-5

قانون جيوب التمام
Law of Cosines

فيما سبق:

درست حل مثلثات باستعمال قانون الجيوب.

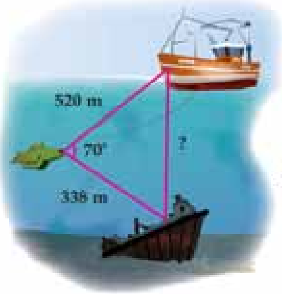
والآن:

- أستعمل قانون جيوب التمام لحل مثلثات.
- أختار طرقًا مناسبة لحل مثلثات.

المفردات:

قانون جيوب التمام
Law of Cosines

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

الغواصات التي تُنزلها السفن إلى المحيط تُستعمل لإيصال الأشخاص إلى أعماق لا يمكنهم الوصول إليها بوسائل أخرى. الغواصة في الشكل المجاور على بعد $520\,m$ من السفينة، وترسل ضوءًا إلى حطام سفينة أخرى على بعد $338\,m$ عنها، يمكن استعمال حساب المثلثات لإيجاد المسافة بين السفينة والحطام.

استعمال قانون جيوب التمام لحل المثلثات: لا يمكن استعمال قانون الجيوب لحل مثلث مثل المثلث المرسوم في الشكل أعلاه. يمكنك استعمال **قانون جيوب التمام** لحل المثلث في الحالتين الآتيتين:

- معرفة طولي ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ضلع - زاوية - ضلع (حالة SAS))
- معرفة أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث (ضلع - ضلع - ضلع (حالة SSS))

مفهوم أساسي — قانون جيوب التمام

أضف إلى مطويتك

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C، على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

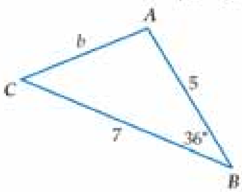
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

مثال 1 — حل مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حُلّ $\triangle ABC$. مقربًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.



الخطوة 1: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$	قانون جيوب التمام
$b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5)\cos 36°$	$a = 7, c = 5, B = 36°$
$b^2 \approx 17.4$	باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط
$b \approx 4.2$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد القياس المجهول لإحدى الزاويتين.

$\frac{\sin A}{7} \approx \frac{\sin 36°}{4.2}$	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$
$\sin A \approx \frac{7\sin 36°}{4.2}$	بضرب كلا الطرفين في 7
$A \approx 78°$	بإيجاد قيمة $\sin^{-1}\frac{7\sin 36°}{4.2}$

الخطوة 3: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle C \approx 180 - (36 + 78) \approx 66$$

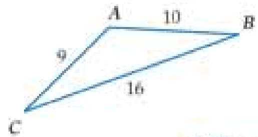
إذن: $b \approx 4.2, A \approx 78°, C \approx 66°$

تحقق من فهمك

1) حُلّ $\triangle FGH$ الذي فيه: $G = 82°, f = 6, h = 4$ مقربًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.

يمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة، وتكون الخطوة الأولى للحل إيجاد قياس الزاوية الكبرى في المثلث حتى نضمن أن الزاويتين الأخريين حادتان عند استعمال قانون الجيوب بعد ذلك.

مثال 2 حل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة



حُلّ $\triangle ABC$ مقربًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 1: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية الكبرى في $\triangle ABC$ وهي $\angle A$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	قانون جيوب التمام
$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10)\cos A$	$a = 16, b = 9, c = 10$
$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10)\cos A$	بطرح 9^2 و 10^2 من كلا الطرفين
$\frac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$	بقسمة كلا الطرفين على $-2(9)(10)$
$-0.4167 \approx \cos A$	باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط
$115° \approx A$	بإيجاد قيمة $\cos^{-1} -0.4167$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قياس $\angle B$.

$\frac{\sin B}{9} \approx \frac{\sin 115°}{16}$	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$
$\sin B \approx \frac{9\sin 115°}{16}$	بضرب كلا الطرفين في 9
$\sin B \approx 0.5098$	باستعمال الآلة الحاسبة
$B \approx 31°$	بإيجاد قيمة $\sin^{-1} 0.5098$

الخطوة 3: أوجد قياس $\angle C$.

$$m\angle C \approx 180 - (115 + 31) \approx 34°$$

إذن: $A \approx 115°, B \approx 31°, C \approx 34°$.

تحقق من فهمك

1) حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه: $a = 5, b = 11, c = 8$ مقربًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استعمال قانون جيوب التمام مرة أخرى لإيجاد قياس زاوية أخرى.

إرشادات للدراسة

التقريب: يمكن أن يؤدي التقريب في بعض الأحيان إلى إجابات غير دقيقة، مثل أن يكون لدينا مثلث مجموع قياسات زواياه 181°.

اختيار الطريقة المناسبة لحل المثلثات: يمكنك استعمال قانون الجيوب وقانون جيوب التمام لحل مثلثات غير قائمة الزاوية، حيث تحتاج على الأقل إلى معرفة طول أحد الأضلاع وقياسي أي عنصرين آخرين من عناصر المثلث. وإذا كان للمثلث حل، فيجب أن تُقرّر إذا كنت ستبدأ باستعمال قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام لحله.

ملخص المفهوم حل المثلثات غير القائمة الزاوية

أضف إلى مطويتك

إذا أعطيت	أبدأ الحل باستعمال
قياسي زاويتين وطول أي ضلع	قانون الجيوب
طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

الرقم القياسي لأعمق مسافة غاص إليها غواص هو 318.2 m.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال قانون جيوب التمام

غوص: ينظر غواص إلى الأعلى بزاوية قياسها $20°$ ليرى سلحفاة تبعد عنه 3 m، وينظر إلى الأسفل بزاوية قياسها $40°$ فيرى سمكة زرقاء تبعد عنه 4 m، ما المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء؟

افهم: تعرف قياسي الزاويتين المتكونتين من نظر الغواص إلى الأعلى وإلى الأسفل، كذلك تعرف المسافة بين الغواص وكل من السلحفاة والسمكة الزرقاء.

خطط: استعمل هذه المعلومات لرسم شكل تقريبي يُمثل المسألة. بما أن طولي ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما معلوم لديك، فيمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحل المسألة.

حُلّ:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	قانون جيوب التمام
$a^2 = 4^2 + 3^2 - 2(4)(3)\cos 60°$	$b = 4, c = 3, A = 60°$
$a^2 = 13$	باستعمال الآلة الحاسبة
$a \approx 3.6$	بإيجاد قيمة a الموجبة

إذن: المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء تساوي 3.6 m تقريبًا.

تحقق: باستعمال قانون الجيوب، يمكنك التوصل إلى أن: $B \approx 74°, C \approx 46°$.
بما أن $C < A < B, c < a < b$، فإن الحل منطقي.

تحقق من فهمك

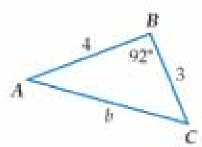
3) **ماراثون:** ركض سعيد مسافة 6 km في اتجاه معين. ثم انعطف بزاوية قياسها $79°$، وركض مسافة 7 km. ما المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها؟

تأكد

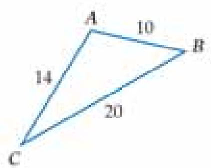
المثالان 1, 2

(في الأسئلة 1-4)، حل كل مثلث. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

1)



2)



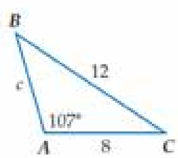
3) $a = 5, b = 8, c = 12$

4) $B = 110°, a = 6, c = 3$

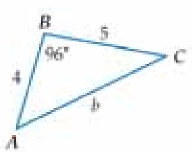
مثال 3

(في الأسئلة 5-7)، حدد القانون (الجيوب أم جيوب التمام) الذي يجب البدء باستعماله لحل كل مثلث مما يأتي، ثم حل المثلث مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

5)



6)

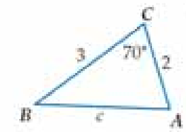


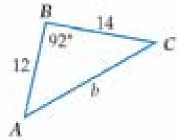
7) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 35°, s = 16, t = 9$.

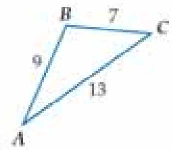
8) **كرة قدم:** في إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط على بعد 20 m من لاعب الجناح الأيمن. ودار لاعب خط الوسط بزاوية قياسها $40°$، فرأى لاعب الجناح الأيسر على بعد 16 m منه. ما المسافة بين لاعبي الجناحين؟

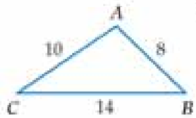
تدرب وحل المسائل

المثالان 2، 1 (في الأسئلة 16 - 9)، حل كل مثلث. قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(9


(10


(11


(12


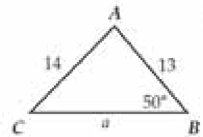
(13 $A = 116°, b = 5, c = 3$

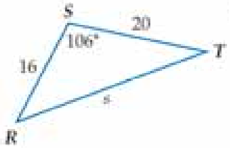
(14 $C = 80°, a = 9, b = 2$

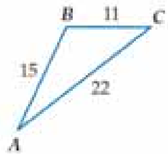
(15 $f = 10, g = 11, h = 4$

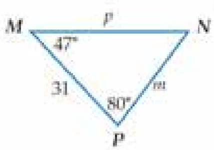
(16 $w = 20, x = 13, y = 12$

مثال 3 (في الأسئلة 22-17)، حدد القانون (الجيوب أم جيوب التمام) الذي يجب البدء باستعماله لحل كل مثلث مما يأتي، ثم حل المثلث مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(17


(18


(19


(20


(21 $\triangle ABC$ الذي فيه: $C = 84°, c = 7, a = 2$.

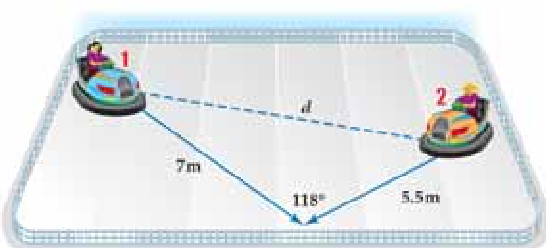
(22 $\triangle HJK$ الذي فيه: $h = 18, j = 10, k = 23$.

(23 **استكشاف:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الأخرى. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

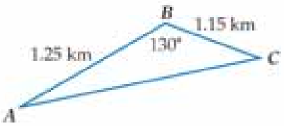
(24 **سباق:** ميدان للسباق على شكل مثلث أطوال أضلاعه 1.8km, 2km, 1.2km . أوجد قياس كل زاوية من زواياه.

(25 **أرض:** قطعة أرض على شكل مثلث أطوال أضلاعه 140m , 210m , 300m . استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد مساحة قطعة الأرض مقربةً إلى أقرب متر مربع.

(26 **ألعاب سيارات:** في ساحة سيارات اللعب في مدينة ألعاب، اصطدمت السيارتان 2 ,1 كما هو مبين في الشكل أدناه. ما المسافة d التي كانت بين السيارتين قبل تصادمهما؟

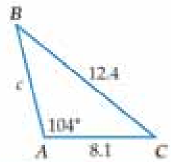


27) **رياضة مائية:** يركب أحمد دراجته المائية ليقطع المسافة من النقطة A إلى النقطة B ثم إلى النقطة C بسرعة 28 كلم/ ساعة. ثم يعود من النقطة C إلى النقطة A مباشرة بسرعة 35 كلم/ ساعة. كم دقيقة تحتاج إليها الرحلة ذهابًا وإيابًا؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

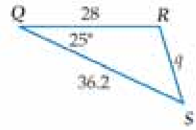


في الأسئلة (28-30)، حل كل مثلث. قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

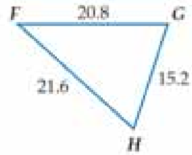
28)



29)



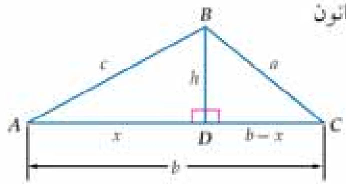
30)



مسائل مهارات التفكير العليا

31) **تحدٍّ:** استعمل الشكل المجاور ونظرية فيثاغورس، لاشتقاق قانون جيوب التمام. استعمل الإرشادات الآتية:

- أولًا طبق نظرية فيثاغورس على $\triangle DBC$.
- في $\triangle ADB$، $c^2 = x^2 + h^2$.
- $\cos A = \frac{x}{c}$



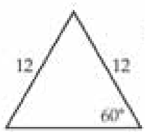
32) **تبرير:** مثلث أطوال أضلاعه 10.6 cm, 8 cm, 14.5 cm . وضّح كيف يمكنك إيجاد قياس الزاوية الكبرى فيه. ثم أوجدها مقربة إلى أقرب درجة.

33) **اكتب:** قارن بين الحالات التي تستطيع فيها استعمال قانون الجيوب لحل مثلث بتلك التي تستطيع فيها استعمال قانون جيوب التمام.

تدريب على اختبار

34) **إجابة قصيرة:** حل المعادلة: $\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8} = \frac{23}{6x}$

35) **هندسة:** محيط الشكل المجاور يساوي:



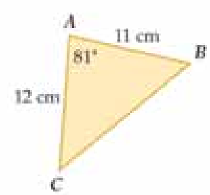
A 24 **C** 36

B 30 **D** 48

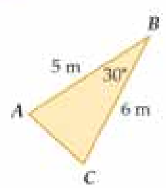
مراجعة تراكمية

أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كل ممّا يأتي مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة: (الدرس 8-4)

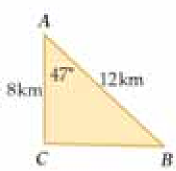
36)



37)



38)



39) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-6, -9)$، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ.

ارسم الزوايا الآتية في الوضع القياسيّ، ثم أوجد الزاوية المرجعيّة لكل منها. (الدرس 8-3)

40) $-15°$

41) $\frac{5}{4}\pi$

42) $245°$

8-6 الدوال الدائرية
Circular Functions

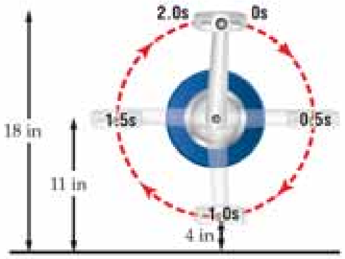
فيما سبق:
درست إيجاد قيم دوال مثلثية باستعمال زوايا مرجعية.

والآن:
- أجد قيم دوال مثلثية بالاعتماد على دائرة الوحدة.
- أستعمل خواص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية.

المفردات:
دائرة الوحدة
unit circle
الدالة الدائرية
circular function
الدالة الدورية
periodic function
الدورة
cycle
طول الدورة
period

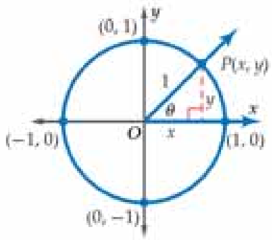
www.obeikaneducation.com

لماذا؟
عندما يقود شخص دراجة هوائية، فإن ارتفاع البدال أثناء دورانه يمثل دالة بالنسبة إلى الزمن، كما هو مبين في الشكل المجاور.



لاحظ أن البدال في الشكل المجاور يدور دورة كاملة كل ثانيتين.

الدوال الدائرية: **دائرة الوحدة** هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة. يمكنك استعمال النقطة P الواقعة على دائرة الوحدة لتعريف دالتي: الجيب وجيب التمام.



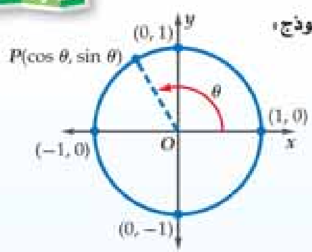
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

وبذلك فإن قيمة $\cos\theta$ هي الإحداثي x، وقيمة $\sin\theta$ هي الإحداثي y لنقطة تقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ مع دائرة الوحدة.

مفهوم أساسي — دوال في دائرة الوحدة
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$

النموذج:



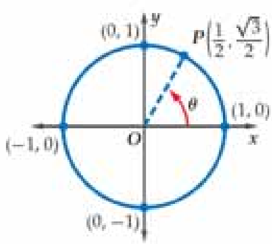
الرموز: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت $\theta = 120°$ فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

كل من $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ دالة بالنسبة إلى θ. وتُسمّى كل منهما **دالة دائرية**؛ لأن تعريف كل منهما اعتمد على دائرة الوحدة.

مثال 1 — إيجاد قيمة كل من الجيب وجيب التمام بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. فأوجد كلًّا من $\cos\theta$, $\sin\theta$.

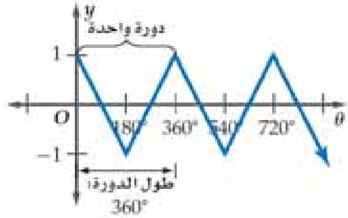


$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

✓ تحقق من فهمك
1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. فأوجد كلًّا من $\cos\theta$, $\sin\theta$.

الدوال الدورية: في **الدوال الدورية** يكون شكل الدالة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. بحيث يُسمّى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمّى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة**.



θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

تكرر الدورة كل 360°

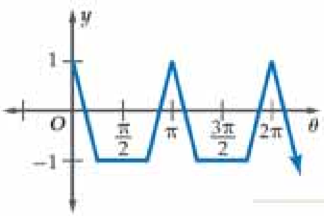
إرشادات للدراسة

الدورات: يمكن أن تبدأ الدورة عند أي نقطة في منحنى الدالة الدورية. ففي المثال 2 إذا كانت بداية الدورة عند $\frac{\pi}{2}$، فإن النمط سيبدأ بالتكرار عند $\frac{3\pi}{2}$ ويكون طول الدورة هو: $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$

مثال 2 إيجاد طول الدورة

أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانيًا في الشكل المجاور.

يبدأ تكرار النمط عند ... ,2π ,π ولذلك طول الدورة هو π.



تحقق من فهمك

2) مثّل بيانيًا دالة طول دورتها 4.

دوران العجلة، والبدال في الدراجة الهوائية، ولعبة العجلة الدوّارة، مثل العديد من الألعاب في مدن الألعاب، ودوران الأشياء المختلفة في الفضاء، كلها تُمثّل دوالّ دورية.

الربط مع الحياة

أغلب متسابقي الدراجات الهوائية يديرون البدالات بمعدلات تزيد على 200 دورة/دقيقة. أما غالبية الناس الذي يركبون دراجات هوائية فيديرونها بمعدلات تتراوح بين 90-120 دورة/دقيقة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال الدوال المثلثية

دراجات هوائية: **عد إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس. إذا تغيّر ارتفاع البّدال في الدراجة الهوائية بصورة دورية كدالة في الزمن.**

a) **أنشئ جدولاً يوضح ارتفاع البدال عند:** 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 , 2.5, 3 sec

عند 0 sec يكون الارتفاع 18 in. وعند 0.5 sec، يكون الارتفاع 11 in، وعند 1 sec يكون الارتفاع 4 in، وهكذا.

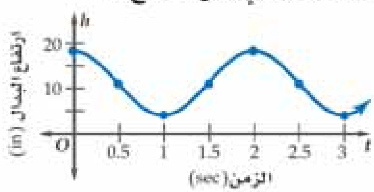
الزمن (sec)	الارتفاع (in)
0	18
0.5	11
1.0	4
1.5	11
2.0	18
2.5	11
3.0	4

b) **أوجد طول دورة الدالة.**

طول الدورة هو الزمن اللازم لإكمال دورة كاملة، لذلك طول الدورة 2 ثانية.

c) **مثّل الدالة بيانيًا. افترض أن المحور الأفقي يُمثّل الزمن t، والمحور الرأسي يُمثّل الارتفاع h.**

أقصى ارتفاع يصله البدال 18 in. وأقل ارتفاع 4 in، ولأن طول الدورة ثانيتين، لذا فإن النمط يتكرر كل 2 sec.



تحقق من فهمك

3) **دراجات هوائية** افرض أن البدال للدراجة الهوائية المحددة في فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس يدور بمعدل دورة واحدة لكل ثانية.

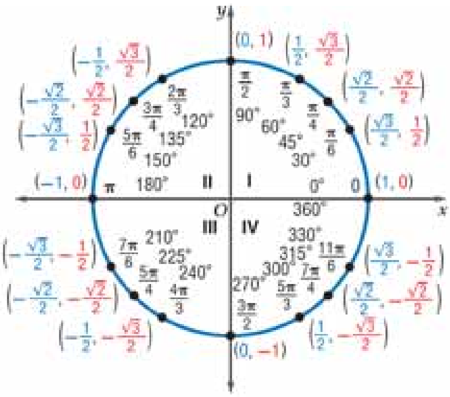
A) أنشئ جدولاً يوضح ارتفاع البدال عند القيم الآتية: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 sec

B) أوجد طول دورة الدالة ومثلها بيانيًا.

إرشادات للدراسة

الجيب وجيب التمام لمساعدتك على التذكر: لكل نقطة (x, y) على دائرة الوحدة يكون $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$ لاحظ أن x تأتي قبل y في ترتيب الأحرف الإنجليزية، وكذلك فإن cosine تأتي قبل sine.

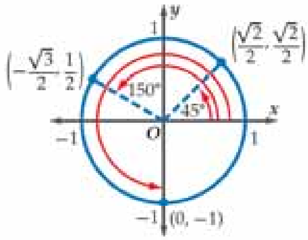
يبيّن الشكل المجاور القيم الدقيقة لكل من $\cos\theta, \sin\theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة. حيث يمثل الإحداثي x قيمة $\cos\theta$، ويمثل الإحداثي y قيمة $\sin\theta$ للنقاط على دائرة الوحدة.



يمكنك استعمال هذه المعلومات في تمثيل الدالتين: $\cos\theta, \sin\theta$ بيانيًّا، حيث يحتوي المحور الأفقي على قيم θ، والمحور الرأسي على قيم الدالة المطلوبة.

تتكرر دورة كل من دالتي الجيب جيب التمام كل $360°$. وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كل منهما $360°$ أو 2π.

إذا كانت النقاط المبيّنة في الشكل تمثل نقاط تقاطع ضلع الانتهاء للزوايا مع دائرة الوحدة، فإن $\theta = 45°, \theta = 150°, \theta = 270°$.

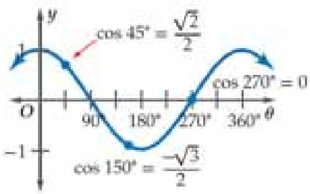


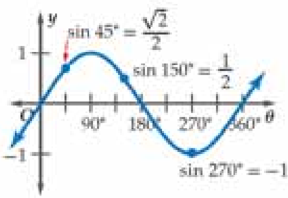
$$(\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(\cos 270°, \sin 270°) = (0, -1)$$

كما يمكن تعيين هذه النقاط على التمثيل البياني لكل من الدالتين $\sin\theta, \cos\theta$ كما يأتي:





إرشادات للدراسة

الراديان عند تمثيل دالتي الجيب وجيب التمام يمكن تدريج المحور θ بالراديان.

بما أن طول الدورة لكل من الدالتين هو $360°$، فإن قيم كل من الدالتين تتكرر كل $360°$.
لذلك فإن $\sin(x + 360°) = \sin x$, $\cos(x + 360°) = \cos x$.

مثال 4 حساب قيم الدوال المثلثية

أوجد القيم الدقيقة لكل دالة ممّا يأتي:

a) $\cos 480°$

$$\cos 480° = \cos(120° + 360°)$$
$$= \cos 120°$$
$$= -\frac{1}{2}$$

b) $\sin\frac{11\pi}{4}$

$$\sin\frac{11\pi}{4} = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{3\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تحقق من فهمك

4A) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

4B) $\sin 420°$

تأكد

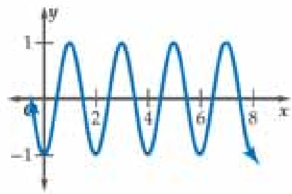
مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كل ممّا يأتي:

1) $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

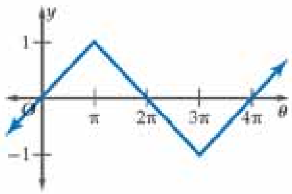
2) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين:

3)



4)



مثال 3 5) **أرجوحة:** إذا مثل ارتفاع أرجوحة دالة دوريّة في الزمن، بحيث تصل الأرجوحة أقصى ارتفاع لها وهو 2m ، ثم تعود إيابًا لتصل 2m مرّة أخرى مرورًا بأقل ارتفاع لها وهو $\frac{1}{2}$m ، مستغرقة زمن قدره 1 sec بين أقل ارتفاع وأقصى ارتفاع.

a) ما الزمن الذي تستغرقه حركة الأرجوحة ذهابًا وإيابًا بدءًا بأقصى ارتفاع وانتهاءً إليه؟

b) مثّل ارتفاع الأرجوحة h كدالة في الزمن t.

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة ممّا يأتي:

6) $\sin\frac{13\pi}{6}$

7) $\sin(-60°)$

8) $\cos 540°$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كل ممّا يأتي:

9) $P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right)$

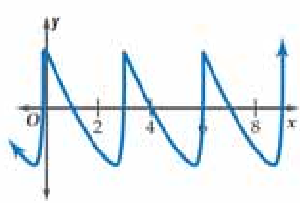
10) $P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right)$

11) $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

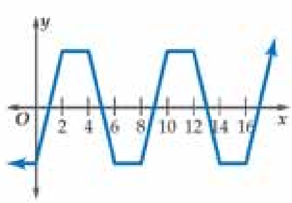
12) $P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكل من الدوال الآتية:

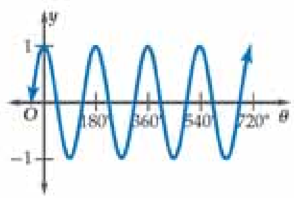
13)



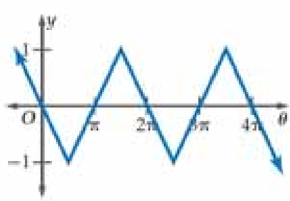
14)



15)



16)



مثال 3

17) **طقس:** يُمثّل الجدول المجاور، متوسط درجات الحرارة في مدينة الطائف لشهور إحدى السنوات.

متوسط درجات الحرارة العظمى			
الشهر	درجة الحرارة (°c)	الشهر	درجة الحرارة (°c)
يناير (1)	15	يوليو (7)	29
فبراير (2)	17	أغسطس (8)	29
مارس (3)	20	سبتمبر (9)	27
إبريل (4)	22	أكتوبر (10)	23
مايو (5)	25	نوفمبر (11)	19
يونيو (6)	28	ديسمبر (12)	16

a) مثّل الدالة الممثلة لهذا الموقف بيانيًّا.

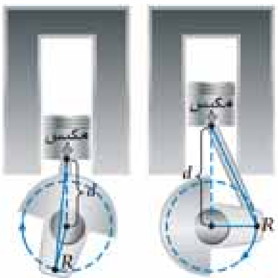
b) أوجد طول دورة الدالة.

مثال 4 أوجد القيم الدقيقة لكل مما يأتي:

18) $\sin \frac{7\pi}{3}$ 19) $\cos(-60°)$ 20) $\cos 450°$

21) $\sin \frac{11\pi}{4}$ 22) $\sin(-45°)$ 23) $\cos 570°$

24) **محركات:** في المحرك الممثّل إلى اليسار، المسافة d من المكبس إلى مركز الدائرة التي تُسمّى ناقل الحركة (الكرنك) وتشكل دالة في سرعة ذراع المكبس. إذا علمت أن النقطة R الواقعة على ذراع المكبس تدور بسرعة 150 دورة/ ثانية، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين:



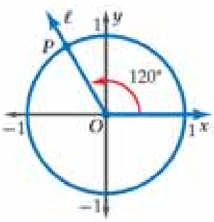
a) أوجد طول الدورة بالثواني.

b) إذا كانت أقصر قيمة للمسافة d تبلغ 1 cm وأكبر قيمة 7 cm فمثّل منحنى الدالة بيانيًّا، معتبرًا أن المحور الأفقي يمثّل الزمن t، والمحور الرأسي يمثّل المسافة d.

تاريخ الرياضيات

اكتشف العرب المسلمون العديد من العلاقات في حساب المثلثات، واستعملوها في حل المعادلات، وإيجاد ارتفاع الشمس، وعمل الجداول الرياضية، ويرجع إليهم الفضل في جعله علمًا مستقلًا عن علم الفلك.

25) **تمثيلات متعددة:** يقطع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة P كما يُبيّن الشكل المجاور.



a) **هندسيًّا:** انقل الشكل إلى دفترك، وارسم ضلع الانتهاء لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها $30°, 60°, 150°, 210°, 315°$ في الوضع القياسي.

b) **جدوليًّا:** أنشئ جدولاً للقيم يوضح ميل كل ضلع انتهاء، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

c) **تحليليًّا:** ماذا تستنتج بالنسبة إلى العلاقة بين ظل الزاوية والميل؟ وضح إجابتك.

أوجد القيمة الدقيقة لكل ممّا يأتي:

26) $\cos 45° - \cos 30°$ 27) $6(\sin 30°)(\sin 60°)$

28) $2 \sin \frac{4\pi}{3} - 3 \cos \frac{11\pi}{6}$ 29) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi$

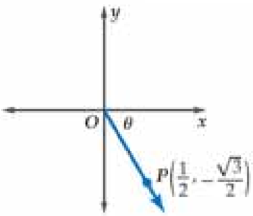
30) $(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2$ 31) $\frac{(\cos 30°)(\cos 150°)}{\sin 315°}$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) اكتشف الخطأ: قام كل من خالد ونواف بحساب القيمة الدقيقة للمقدار $\cos\frac{-\pi}{3}$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

خالد	نواف
$\cos\frac{-\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$ $= -0.5$	$\cos\frac{-\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ $= \cos\frac{5\pi}{3} = 0.5$

33) تحدٍّ: إذا بدأ نصف مستقيم من نقطة الأصل مارًّا بالنقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في المستوى الإحداثي فاذكر قياسًا للزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور x.



34) تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك
" طول دورة دالة الجيب من مضاعفات π"

35) اكتب: وضّح كيف يمكنك حساب طول دورة الدالة الدورية، باستعمال التمثيل البياني للدالة. ضمّن في توضيحك وصفًا للدورة.

تدريب على اختبار

36) إذا كان $d^2 + 8 = 21$ ، فإن: $d^2 - 8 = ?$

5 **A**   13 **B**   31 **C**   161 **D**

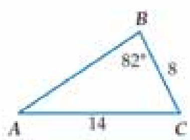
37) هندسة: مساحة المثلث في الشكل المجاور تساوي:

48 **A**   96 **B**   41.6 **C**   24 **D**

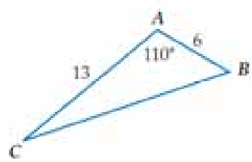
مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المثلثات الآتية: قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: (الدرس 8-4)

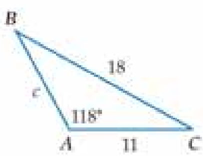
38)



39)



40)



حدّد إذا كان للمثلث في كل مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حلول. أوجد الحلول، مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: (الدرس 8-4)

41) $A = 72°, a = 6, b = 11$

42) $A = 46°, a = 10, b = 8$

43) $A = 110°, a = 9, b = 5$

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

44) $\frac{240}{\left|1 - \frac{5}{4}\right|}$

45) $\frac{180}{\left|2 - \frac{1}{3}\right|}$

46) $\frac{90}{\left|2 - \frac{11}{4}\right|}$

8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا
Graphing Trigonometric Functions

فيما سبق:

درست الدوال الدورية.

والآن:

- أصف دوال الجيب وجيب التمام والظل، وأمثلها بيانيًا.
- أصف دوال مثلثية أخرى، وأمثلها بيانيًا.

المفردات:

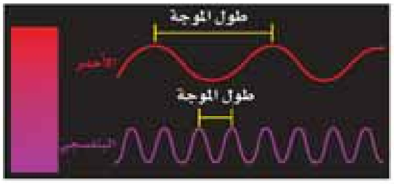
السعة amplitude

التردد frequency

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

لموجات الضوء المرئية، أطوال موجات أو ترددات مختلفة. فاللون الأحمر له أكبر طول موجة، واللون البنفسجي له أقصر طول موجة.

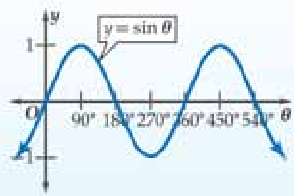
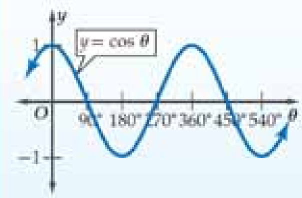


دوال الجيب، وجيب التمام، والظل: يمكن تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا في المستوى الإحداثي. تذكّر أن منحنيات الدوال الدورية فيها أنماط متكررة أو دورات. وأن الطول الأفقي لكل دورة يسمّى طول الدورة.

سعة منحنى دالة الجيب أو دالة جيب التمام، تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

مفهوم أساسي — دالتا الجيب وجيب التمام

أضف إلى مطويتك

الدالة المولدة (الأم)	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

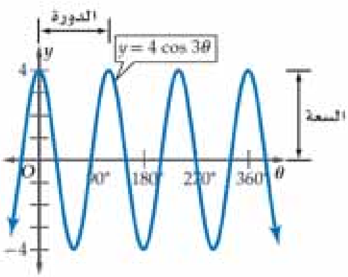
يمكنك تطبيق ما تعلمتهُ أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوال الأخرى على التمثيل البياني للدوال المثلثية: $y = a\sin b\theta$, $y = a\cos b\theta$، التي سعتها $|a|$، وطول دورتها $\frac{360°}{|b|}$.

مثال 1 إيجاد السعة وطول الدورة

أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 4\cos 3\theta$.

السعة: $|a| = |4| = 4$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|3|} = 120°$



تحقق من فهمك

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة فيما يأتي:

1A) $y = \cos\frac{1}{2}\theta$

1B) $y = 3\sin 5\theta$

استعمل منحنيات الدوال المولدة (الأم) لتمثيل كل من الدالتين: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$. ثم استعمل السعة وطول الدورة لرسم منحنى دالة الجيب أو دالة جيب التمام المناسبة بيانيًا. ويمكنك أيضًا استعمال نقاط التقاطع مع المحور θ.

حيث نقاط التقاطع مع المحور θ للدالة: $y = a \sin b\theta$ وللدالة: $y = a \cos b\theta$ في إحدى الدورات هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) \left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right)$

> **إرشادات للدراسة**
>
> **طول الدورة:** في الدالتين: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$، b تُمثّل عدد الدورات في 360°. ففي المثال 1 يدل العدد 3 في الدالة: $y = 4 \cos 3\theta$ على وجود 3 دورات في 360°. مما يعني وجود دورة واحدة في 120°.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **السعة:** في التمثيل البياني لكلٍ من الدالتين $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$، تكون السعة هي $|a|$، والقيمة العظمى هي $y = |a|$ والقيمة الصغرى هي $y = -|a|$.

مثال 2 تمثيل دالتي الجيب وجيب التمام بيانيًا

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

a) $y = 2 \sin \theta$

أوجد السعة، وطول الدورة ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 2 , b = 1$.

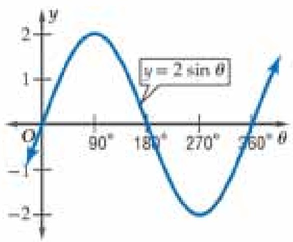
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← المنحنى يتسع رأسيًا بحيث تكون القيمة العظمى 2 والقيمة الصغرى -2.

طول الدورة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|1|} = 360^\circ$ ← دورة واحدة طولها 360°.

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $(0, 0)$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (180^\circ, 0)$

$\left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (360^\circ, 0)$



b) $y = \cos 4\theta$

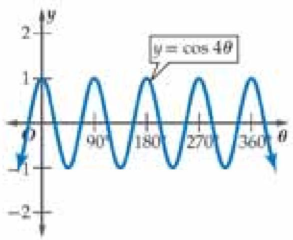
أوجد السعة، وطول الدورة ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 1 , b = 4$.

السعة: $|a| = |1| = 1$

طول الدورة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|4|} = 90^\circ$

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (22.5^\circ, 0)$

$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (67.5^\circ, 0)$



تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

2A) $y = 3 \cos \theta$

2B) $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

تفيد الدوال المثلثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتم وصف هذه الأمواج عادة باستعمال **التردد** وهو عدد الدورات في وحدة الزمن.

ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالة نجد مقلوب طول الدورة، فمثلًا إذا كان طول الدورة للدالة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن ترددها يساوي 100 دورة في الثانية.

مثال 3 من واقع الحياة — تمثيل موقف بدالة دورية

أصوات: تُسمّى الأصوات التي يكون ترددها أقل من المستوى الذي يسمعه الإنسان، الأصوات تحت السمعية. ويمكن للفيلة سماع الأصوات تحت السمعية التي يصل ترددها إلى 5 هيرتز أو 5 دورات/ ثانية.

a) أوجد طول دورة الدالة التي تعبر عن موجات الصوت.

يوجد 5 دورات في الثانية، وطول الدورة هو مقلوب التردد ويساوي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة، لذلك فإن طول الدورة هو $\frac{1}{5} = 0.2\text{sec}$.

b) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالة جيب تُمثّل موجة الصوت y كدالة في الزمن t، ثم مثّلها بيانيًّا.

طول الدورة $= \frac{2\pi}{\|b\|}$	بكتابة العلاقة بين طول الدورة و b
$0.2 = \frac{2\pi}{\|b\|}$	بالتعويض
$0.2\|b\| = 2\pi$	بضرب الطرفين في $\|b\|$
$b = 10\pi$	بضرب الطرفين في 5، b موجبة
$y = a \sin b\theta$	الصورة العامة لدالة الجيب
$y = 1 \sin 10\pi t$	$a = 1,\ b = 10\pi,\ \theta = t$
$y = \sin 10\pi t$	بالتبسيط

تحقق من فهمك

3) **أصوات:** يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز.

A) أوجد طول دورة الدالة.

B) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالة جيب التمام التي تعبر عن موجات الصوت، ثم مثّلها بيانيًّا.

الربط مع الحياة

يمكن للفيلة سماع صوت يبعد عنها 5 أميال. ويمكن للإنسان سماع الأصوات التي يتراوح ترددها بين 20 هيرتز إلى 20000 هيرتز.

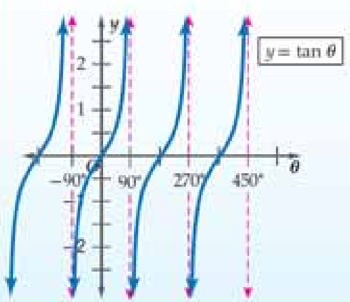
إرشادات للدراسة

السعة وطول الدورة: لاحظ أن السعة تؤثر في منحنى الدالة في اتجاه المحور y، أما طول الدورة فيؤثر في اتجاه المحور x .

تُعَدّ دالة الظل من الدوال المثلثية التي لها خطوط تقارب.

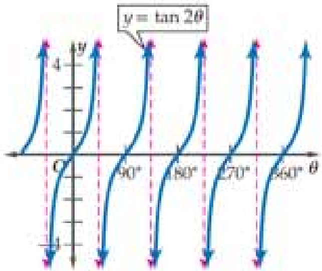
مفهوم أساسي — دالة الظل

أضف إلى مطويتك

الدالة المولدة (الأم)	$y = \tan \theta$	التمثيل البياني للدالة
المجال	$\{\theta \| \theta \neq 90 + 180n,\ n \in Z\}$	
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية	
السعة	غير معرّفة	
طول الدورة	180°	

طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \tan b\theta$ ، يساوي $\frac{180°}{|b|}$ ، ولا يوجد سعة لهذه الدالة. وخطوط التقارب الرأسية لها عند المضاعفات الفردية للعدد $\frac{180°}{2|b|}$

مثال 4 تمثيل دوال الظل بيانيًا



أوجد طول دورة الدالة $y = \tan 2\theta$. ومثّل هذه الدالة بيانيًا.

طول الدورة: $\frac{180^\circ}{|b|} = \frac{180^\circ}{|2|} = 90^\circ$

خط تقارب عند: $\frac{180^\circ}{|2b|} = \frac{180^\circ}{2|2|} = 45^\circ$

ارسم خطوط التقارب عند

$-1 \cdot 45^\circ = -45^\circ,\ 1 \cdot 45^\circ = 45^\circ,\ 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ, \ldots$

استعمل $y = \tan \theta$، ولكن ارسم دورة كاملة كل 90° .

تحقق من فهمك

4) أوجد طول دورة الدالة $y = \frac{1}{2}\tan \theta$. ثم مثّل هذه الدالة بيانيًا.

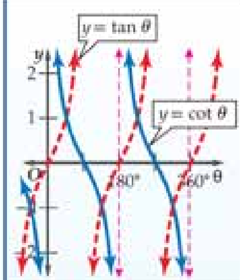
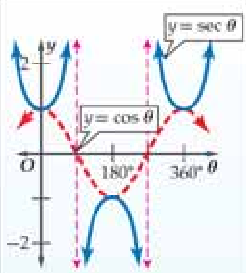
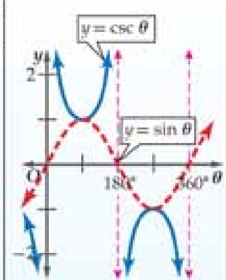
إرشادات للدراسة

دالة الظل: لا يوجد سعة لدالة الظل بسبب عدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها.

تمثيل الدوال المثلثية الأخرى بيانيًا: ترتبط منحنيات دوال قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام بمنحنيات دوال الجيب، وجيب التمام، والظل.

مفهوم أساسي دوال قاطع التمام والقاطع وظل التمام

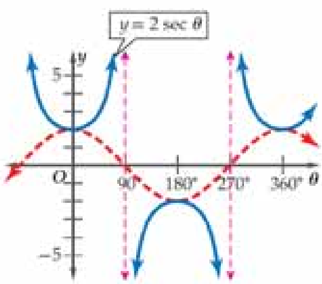
أضف إلى مطويتك

$y = \cot \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \csc \theta$	الدالة المولدة (الأم)
			التمثيل البياني
$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$	المجال
مجموعة الأعداد الحقيقية	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	المدى
غير معرّفة	غير معرّفة	غير معرّفة	السعة
180°	360°	360°	طول الدورة

إرشادات للدراسة

دوال المقلوب: يمكنك استعمال منحنيات الدوال: $y = \sin \theta,\ y = \cos \theta,\ y = \tan \theta$ لتمثيل منحنيات دوال المقلوب $\csc \theta, \sec \theta, \cot \theta$.

مثال 5 تمثيل الدوال المثلثية الأخرى بيانيًا



أوجد طول دورة الدالة $y = 2\sec \theta$. ثم مثّل هذه الدالة بيانيًا.

بما أن: $2\sec \theta$ هو مقلوب: $\frac{1}{2}\cos \theta$، فإن لكل من تمثيليهما البيانيين طول الدورة نفسه والذي يساوي 360°. خطوط التقارب الرأسية تكون عندما $\cos \theta = 0$. أي توجد خطوط التقارب عند $\theta = 90^\circ,\ \theta = 270^\circ$. مثّل الدالة بيانيًا.

تحقق من فهمك

5) أوجد طول دورة الدالة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

تأكـد

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

المثالان 1, 2

1) $y = 4 \sin \theta$ 2) $y = \sin 3\theta$ 3) $y = \cos 2\theta$ 4) $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

مثال 3

5) **عناكب،** عندما تسقط حشرة ما في شبكة العنكبوت، فإن الشبكة تهتز بتردد يبلغ 14 هيرتز.

a) أوجد طول دورة الدالة.

b) افرض أن سعة الدالة وحدة واحدة. واكتب دالة جيب تُمثّل اهتزازات الشبكة y كدالة في الزمن t، ومثلها بيانيًّا.

المثالان 4, 5

أوجد طول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

6) $y = 3 \tan \theta$ 7) $y = 2 \csc \theta$ 8) $y = \cot 2\theta$

تدرب وحل المسائل

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة فيما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

المثالان 1, 2

9) $y = 2 \cos \theta$ 10) $y = 3 \sin \theta$ 11) $y = \sin 2\theta$ 12) $y = \cos 3\theta$

13) $y = \frac{3}{4} \cos \theta$ 14) $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ 15) $y = 3 \cos 2\theta$ 16) $y = 5 \sin \frac{2}{3}\theta$

مثال 3

17) **أمواج،** قارب في عرض البحر يرتفع إلى الأعلى وينخفض إلى الأسفل مع الأمواج. الفرق بين أعلى ارتفاع وأقل ارتفاع للقارب 8 بوصات. ويكون القارب مستقرًا عندما يكون في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة. وتستمر كل دورة في هذه الحركة الدورية لمدة 3 ثوانٍ. اكتب دالة تُمثّل حركة القارب ومثّلها بيانيًّا. افرض أن h: الارتفاع بالبوصات، t: الزمن بالثواني. وأن القارب يكون في وضع مستقر عند $t = 0$.

18) **كهرباء،** يتمثّل فرق الجهد الكهربائي الخارج من أحد الأجهزة الكهربائية بين: $165, -165$ فولت وبتردد مقداره 50 دورة في الثانية في دالة دورية. اكتب دالة تُمثّل فرق الجهد V كدالة في الزمن t ومثّلها بيانيًّا. افرض أنه عندما $t = 0$ فإن فرق الجهد يساوي 165 فولت.

المثالان 4, 5

أوجد طول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

19) $y = \tan \frac{1}{2}\theta$ 20) $y = 3 \sec \theta$ 21) $y = 2 \cot \theta$ 22) $y = \csc \frac{1}{2}\theta$

23) **زلازل،** محطة لرصد الزلازل رصدت موجة لزلزال ذات تردد 0.5 هيرتز وسعتها تساوي مترًا واحدًا.

a) اكتب دالة جيب تمثل ارتفاع الموجة h كدالة في الزمن t. افرض أن نقطة الاتزان للموجة $h = 0$ تقع في منتصف المسافة بين أخفض نقطة وأعلى نقطة في الموجة.

b) مثّل هذه الدالة بيانيًّا.

الربط مع الحياة

الزلزال عبارة عن اهتزاز أرضي سريع يتبعه ارتدادات تدعى أمواج زلزالية وهذا يعود إلى تكسر الصخور وإزاحتها نتيجة لمؤثرات جيولوجية ينجم عنها تحرك الصفائح الأرضية.

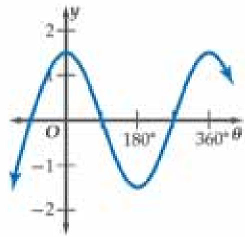
24) **اهتزازات،** سلك مشدود بين نقطتين يهتز بتردد 130 هيرتز. اكتب دالة جيب التمام التي تمثل اهتزازات السلك y كدالة في الزمن t ومثّلها بيانيًّا. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. وإذا تضاعف التردد، فماذا يحصل لكل من طول الدورة والسعة؟

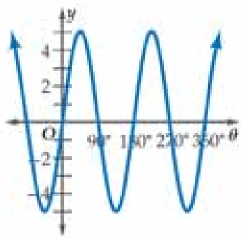
أوجد السعة، (إن كانت معرّفة) وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثّلها بيانيًّا:

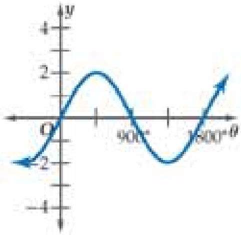
25) $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta$ 26) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4}\theta$ 27) $y = 2 \tan \frac{1}{2}\theta$

28) $y = 2 \sec \frac{4}{5}\theta$ 29) $y = 5 \csc 3\theta$ 30) $y = 2 \cot 6\theta$

حدّد طول دورة كلٍّ من الدوال الممثلة بيانيًّا فيما يأتي، ثم اكتب قاعدتها:

(31


(32


(33


مسائل مهارات التفكير العليا

34) **تحدٍّ:** حدد المجال والمدى لكل من الدالتين $y = a \cos \theta$ ، $y = a \sec \theta$ حيث a عدد حقيقي موجب.

35) **تبرير:** عيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين منحنى الدالة $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ ومنحنى الدالة $y = \sin \frac{1}{2} \theta$.

36) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة مثلثية سعتها 3، وطول دورتها $180°$. ثم مثّلها بيانيًّا.

37) **اكتب:** وضّح كيف تُحسب سعة الدالة $y = -2 \sin \theta$. ووضّح كيف يؤثّر المعامل السالب في التمثيل البيانيّ للدالة.

تدريب على اختبار

38) **إجابة قصيرة:** أوجد الحد رقم 100001 في المتابعة:

13, 20, 27, 34, 41, …

39) إذا كان عدد سكان إحدى المدن قبل عشر سنوات يساوي 312430 نسمة، وعدد السكان الحالي يساوي 418270 نسمة، فما النسبة المئوية للزيادة في عدد السكان خلال السنوات العشر الماضية؟

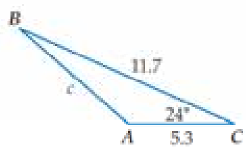
A 25%　　B 34%　　C 66%　　D 75%

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل ممّا يأتي: (الدرس 3-8)

40) $\cos 120° - \sin 30°$　　41) $3(\sin 45°)(\sin 60°)$　　42) $4 \sin \frac{4\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{6}$

43) حلّ المثلث المجاور، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، والزاويتين إلى أقرب درجة. (الدرس 5-8)



44) مثّل الدالة $y = x^2 + 1$ كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا: (مهارة سابقة)

8-8

الدوال المثلثية العكسية
Inverse Trigonometric Functions

فيما سبق:

درست تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا.

والآن:

- أجد قيم الدوال المثلثية العكسية.
- أحل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية.

المفردات:

القيم الأساسية
principal values

دالة معكوس الجيب
Arcsine function

دالة معكوس جيب التمام
Arccosine function

دالة معكوس الظل
Arctangent function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

لقد تعلمت كيف تستعمل معكوس الدوال المثلثية لإيجاد قياسات الزوايا الحادة. مثال: يتكئ رف الكتب في الشكل المجاور على حائط عمودي، بحيث تبعد قاعدته عن الجدار بمقدار 15 in ويصل ارتفاعه إلى 75 in . ولإيجاد قياس الزاوية θ ، استعمل دالة الظل.

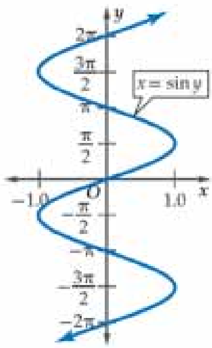
$$\tan\theta = \frac{15}{75} = 0.2$$

ثم أوجد قياس الزاوية التي ظلها 0.2 مستعملًا الآلة الحاسبة.

2nd $\tan^{-1}$ .2 enter 11.30993247

إذن قياس الزاوية θ حوالي $11°$.

معكوس الدالة المثلثية إذا علمت قيمة الدالة المثلثية لزاوية معلومة، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالة لإيجاد قياس الزاوية. تذكّر أن معكوس الدالة هو العلاقة التي تعكس فيها قيم المتغيرين: x , y. فمعكوس: $y = \sin x$ ، هو $x = \sin y$ ، الممثّل بيانيًا في الشكل المجاور.



لاحظ أن معكوس الدالة ليس دالة لوجود عدد من قيم y لكل قيمة من قيم x. لكن إذا تم تحديد مجال الدالة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$، فإن المعكوس يكون دالة.

تُسمّى القيم في هذا المجال المحدد **القيم الأساسية**. فالدوال المثلثية ذات المجال المحدد تُمثّل بأحرف كبيرة، هكذا:

- $y = \text{Sin}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \text{Cos}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ ، $0 \le x \le \pi$
- $y = \text{Tan}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

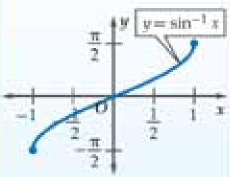
يمكن استعمال الدوال ذات المجالات المحددة لتعريف دوال عكسية: لكل من دالة الجيب، ودالة جيب التمام ودالة الظل وهي **دالة معكوس الجيب**، و**دالة معكوس جيب التمام**، و**دالة معكوس الظل** كما يأتي:

مفهوم أساسي — الدوال المثلثية المعكوسة

أضف إلى مطويتك

الدالة العكسية	الرموز	المجال	المدى
دالة معكوس الجيب	$y = \text{Arcsin}\, x$ $y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$
دالة معكوس جيب التمام	$y = \text{Arccos}\, x$ $y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$
دالة معكوس الظل	$y = \text{Arctan}\, x$ $y = \text{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$

نموذج



مراجعة المفردات

الدوال العكسية
f, f^{-1} كلٌّ منهما دالة عكسية للأخرى تعني: $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

في العلاقة $y = \cos^{-1} x$، إذا كانت $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60°$، $300°$، كما أن كل زاوية تشترك مع هاتين الزاويتين بضلع الانتهاء تعد قيمة لـ y أيضًا. أما في الدالة $y = \text{Cos}^{-1} x$، إذا كانت $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60°$ فقط.

مثال 1 إيجاد قيم الدوال العكسية

أوجد قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان في كل مما يأتي:

a) $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

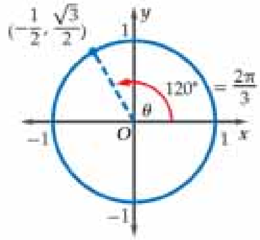
أوجد الزاوية θ، حيث $0° \leq \theta \leq 180°$ والتي قيمة جيب التمام لها $-\frac{1}{2}$.

الطريقة 1 استعمال دائرة الوحدة

أوجد نقطة على دائرة الوحدة إحداثيُّها x هو $-\frac{1}{2}$.

نلاحظ أن: $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، عندما $\theta = 120°$

إذن، $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$.



الطريقة 2 استعمال الآلة الحاسبة

المفاتيح: 1:Add Calculator | trig | cos⁻¹ | (-) | 1 | ÷ | 2 | enter **120**

إذن، $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$.

b) **Arctan 1**

أوجد الزاوية θ في الفترة $-90° \leq \theta \leq 90°$ والتي ظلها يساوي 1.

المفاتيح: trig | tan⁻¹ | 1 | enter **45** إذن، $\text{Arctan } 1 = 45° = \frac{\pi}{4}$.

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية
تذكّر أنه عند حسابك لقيمة معكوس الدالة المثلثية، فإن الناتج هو قياس زاوية.

✓ **تحقق من فهمك**

1A) $\text{Cos}^{-1} 0$ **1B)** $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$؛

عند حساب قيمة معينة بوجود عدد من الدوال المثلثية، استعمل ترتيب العمليات الحسابية للحل.

مثال 2 إيجاد قيمة مثلثية

أوجد قيمة $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **إلى أقرب جزء من مئة.**

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: trig | tan | trig | cos⁻¹ | 1 | ÷ | 2 | enter 1.732050808

إذن، $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 1.73$.

تحقق، $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60°, \tan 60° \approx 1.73$ إذن الإجابة صحيحة.

إرشادات للدراسة

وضع الآلة الحاسبة
تأكد من إعدادات الحاسبة البيانيّة لقياس الزوايا بالدرجات بالضغط على المفاتيح on | 5:Settings | 2:Settings | 1:General وتأكد أن الزاوية مثبتة على القياس بالدرجة (Degree).

✓ **تحقق من فهمك**

أوجد قيمة كل ممّا يأتي، إلى أقرب جزء من مئة:

2A) $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$ **2B)** $\cos\left(\text{Arccos} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

حل المعادلات باستعمال الدوال العكسية يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية؛ لإيجاد قياس الزاوية.

مثال 3 على اختبار

إذا كان $\text{Sin } \theta = -0.35$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات يساوي:

A $-20.5°$ B $-0.6°$ C $0.6°$ D $20.5°$

اقرأ فقرة الاختبار

جيب الزاوية θ هو -0.35. ويمكن كتابة هذا على الصورة: $\theta = \text{Arcsin}\,(-0.35)$.

حلّ فقرة الاختبار

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: [2nd] [$\sin^{-1}$] [(−)] 0.35 [enter] -20.48731511

إذن، $\theta \approx -20.5°$. الإجابة الصحيحة هي A.

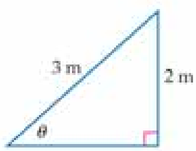
تحقق من فهمك

3) إذا كان $\text{Tan } \theta = 1.8$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات يساوي:

A $0.03°$ B $29.1°$ C $60.9°$ D لا يوجد حل

يمكن استعمال الدوال المثلثية العكسيّة، لحساب قيم كل من زوايا الانحدار وزوايا الانخفاض وزوايا الارتفاع.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال الدوال المثلثية العكسية



لعبة التزحلق: لعبة تزحلق للأطفال، ارتفاعها 2 m، وطولها 3 m كما في الشكل المجاور. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قيمة الزاوية θ التي تصنعها لعبة التزحلق مع الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

بما أن طول الضلع المقابل وطول الوتر معلومان، فيمكن استعمال دالة الجيب.

$$\text{Sin } \theta = \frac{2}{3}$$ دالة الجيب

$$\theta = \text{Sin}^{-1}\frac{2}{3}$$ دالة معكوس الجيب

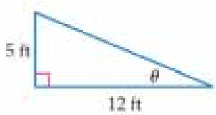
$$\theta \approx 41.8°$$ استعمل الآلة الحاسبة

إذن قياس الزاوية يساوي $41.8°$ تقريبًا.

تحقق باستعمال الآلة الحاسبة، $\sin 41.8 \approx 0.66653 \approx \frac{2}{3}$.

أي أن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك



4) **تزلج** يظهر الشكل المجاور منحدرًا للتزلج. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد الزاوية (θ) التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

إرشادات للاختبار

حذف البدائل

إشارة $\text{Sin } \theta$ تُحدّد قياس الزاوية في الربع الأول أو الربع الرابع، وبما أن -0.35 قيمة سالبة، فابحث عن زاوية في الربع الرابع.

تأكد

مثال 1 أوجد قيمة كل ممّا يأتي بالدرجات، وبالراديان.

(1 $\text{Sin}^{-1}\frac{1}{2}$ (2 $\text{Arctan}(-\sqrt{3})$ (3 $\text{Arccos}(-1)$

مثال 2 أوجد قيمة كل ممّا يأتي، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

(4 $\cos\left(\text{Arcsin}\frac{4}{5}\right)$ (5 $\tan(\text{Cos}^{-1}1)$ (6 $\sin\left(\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

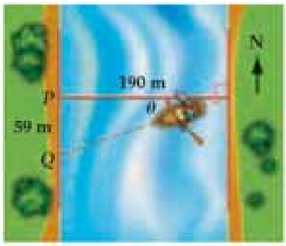
مثال 3 (7 **اختيار من متعدد:** إذا كان $\text{Sin}\,\theta = 0.422$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات يساوي:

A $25°$ B $42°$ C $48°$ D $65°$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

(8 $\text{Cos}\,\theta = 0.9$ (9 $\text{Sin}\,\theta = -0.46$ (10 $\text{Tan}\,\theta = 2.1$

مثال 4 (11 **قوارب:** يسير قارب باتجاه الغرب؛ ليقطع نهرًا عرضه 190 m، فيصل إلى النقطة Q التي تبعد مسافة 59 m عن وجهته الأصلية P؛ بسبب التيار. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد الزاوية θ التي أزاح التيار القارب بها عن اتجاهه الأصلي، ثم أوجد قياس هذه الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة.



تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة كل ممّا يأتي بالدرجات، وبالراديان.

(12 $\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (13 $\text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (14 $\text{Sin}^{-1}(-1)$

(15 $\text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$ (16 $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (17 $\text{Arctan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

مثال 2 أوجد قيمة كل ممّا يأتي مقرّباً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

(18 $\tan(\text{Cos}^{-1}1)$ (19 $\tan\left[\text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (20 $\cos\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{5}\right)$

(21 $\sin(\text{Arctan}\sqrt{3})$ (22 $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{9}\right)$ (23 $\sin\left[\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

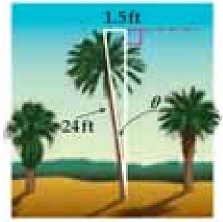
مثال 3 حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك.

(24 $\text{Tan}\,\theta = 3.8$ (25 $\text{Sin}\,\theta = 0.9$ (26 $\text{Sin}\,\theta = -2.5$

(27 $\text{Cos}\,\theta = -0.25$ (28 $\text{Cos}\,\theta = 0.56$ (29 $\text{Tan}\,\theta = -0.2$

مثال 4

30) **نخيل:** شجرة نخيل طولها 24 ft، تميل عن الاتجاه الرأسي بمقدار 1.5 ft كما في الشكل، اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد زاوية ميل الشجرة (θ). ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.



الربط مع الحياة

النخلة من الأشجار المعمرة التي يصل عمرها إلى 150 عامًا. ويُستدل على عمرها من بقايا قواعد الأوراق التي تظهر على هيئة درجات، وكل 3 منها فوق بعضها على خط واحد تمثل عامًا من عمر النخلة.

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.

31) $\csc \theta = 1$ 32) $\sec \theta = -1$ 33) $\sec \theta = 1$

34) $\csc \theta = \frac{1}{2}$ 35) $\cot \theta = 1$ 36) $\sec \theta = 2$

37) **تمثيلات متعددة:** معتبرًا $y = \text{Cos}^{-1} x$.

a) **بيانيًا:** مثّل الدالة بيانيًّا، وأوجد المجال والمدى.

b) **عدديًا:** اختر قيمة للمتغيّر x بين $0 ,1-$. ثم أوجد قيمة الدالة عندها إلى أقرب جزء من عشرة.

c) **تحليليًا:** قارن بين التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$، والتمثيل البياني للدالة $y = \text{Cos}^{-1} x$.

مسائل مهارات التفكير العليا

38) **اكتشف الخطأ:** قام كل من خليل وعبدالرحمن بحل المعادلة $\cos \theta = 0.3$ حيث $90 < \theta < 180$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

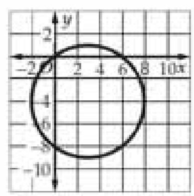
خليل	عبدالرحمن
$\cos \theta = 0.3$	$\cos \theta = 0.3$
$\cos^{-1} 0.3 = 72.5°$	$\cos^{-1} 0.3 = 162.5°$

39) **تبرير:** وضّح كيف يرتبط مجال الدالة $y = \text{Sin}^{-1} x$ مع مدى الدالة $y = \text{Sin}\, x$.

40) فسر لماذا كل من $\text{Cos}^{-1} 8 , \text{Sin}^{-1} 8$ غير معرفة، بينما $\text{Tan}^{-1} 8$ معرفة.

تدريب على اختبار

41) **إجابة قصيرة:** أوجد معادلة الدائرة الممثلة في الشكل الآتي:



42) إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x , g(x) = 4 - 2x$ ، فأوجد $g[f(x)]$؟

A $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

B $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

C $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

D $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

مراجعة تراكمية

43) أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 4 \cos 2\theta$ ، ثم مثّل هذه الدالة بيانيًا.

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

44) $\cos 3\pi$ 45) $\tan 120°$ 46) $\sin 300°$ 47) $\sec \frac{7\pi}{6}$

الفصل 8
دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوال المثلثية في المثلثات قائمة الزاوية (الدرس 8-1)

- $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}, \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}, \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
- $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}, \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}, \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

الزوايا وقياس الزاوية والدوال المثلثية للزوايا
(الدرسان 8-2, 8-3)

- يُحدّد قياس الزاوية بمقدار الدوران من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.
- يمكنك إيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ، بمعلومية إحداثيي النقطة $P(x, y)$ التي تقع على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الجيوب وقانون جيوب التمام
(الدرسان 8-4, 8-5)

- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

الدوال الدائرية والدوال المثلثية العكسية
(الدرسان 8-6, 8-8)

- إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x, \sin\theta = y$.
- $y = \text{Sin}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا (الدرس 8-7)

- للدوال المثلثية التي على إحدى الصورتين $y = a\sin b\theta, y = a\cos b\theta$، سعة تساوي $|a|$ وطول دورة يساوي $\frac{360°}{|b|}$ أو $\frac{2\pi}{|b|}$.
- أما الدالة المثلثية $y = a\tan b\theta$ فطول دورتها يساوي $\frac{180°}{|b|}$ أو $\frac{\pi}{|b|}$.

المطويات منظم أفكار

تأكّد من أن المفاهيم الأساسية مدوّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية

- **حساب المثلثات** ص 156
- **النسبة المثلثية** ص 156
- **الدالة المثلثية** ص 156
- **الجيب** ص 156
- **جيب التمام** ص 156
- **الظل** ص 156
- **قاطع التمام** ص 156
- **القاطع** ص 156
- **ظل التمام** ص 156
- **درال المقلوب** ص 157
- **زاوية الارتفاع** ص 160
- **زاوية الانخفاض** ص 160
- **الوضع القياسي** ص 164
- **ضلع الابتداء** ص 164
- **ضلع الانتهاء** ص 164
- **الراديان** ص 166
- **الزاوية المركزية** ص 167
- **الزاوية الربعية** ص 172
- **الزاوية المرجعية** ص 172
- **قانون الجيوب** ص 178
- **حل المثلث** ص 178
- **قانون جيوب التمام** ص 185
- **دائرة الوحدة** ص 190
- **الدالة الدائرية** ص 190
- **الدالة الدورية** ص 191
- **الدورة** ص 191
- **طول الدورة** ص 191
- **السعة** ص 196
- **التردد** ص 197
- **القيم الأساسية** ص 202
- **دالة معكوس الجيب** ص 202
- **دالة معكوس جيب التمام** ص 202
- **دالة معكوس الظل** ص 202

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) ________ يُستعمل لحل مثلث بمعلومية قياسي زاويتين وطول ضلع فيه.

2) الدوال $\cot\theta, \csc\theta, \sec\theta$ تسمى ________

3) تسمى المسافة الأفقية في الدورة ________ .

4) إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y فإن هذه الزاوية تسمى ________

5) ________ هي الزاوية المحصورة بين خط النظر والخط الأفقي عندما ينظر الشخص إلى أعلى.

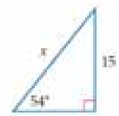
6) ________ منحنى دالة الجيب أو منحنى دالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

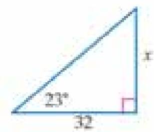
دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

8-1 الدوال المثلثية في المثلثات قائمة الزاوية (ص 163-156)

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم.

(7) 

(8) 

أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

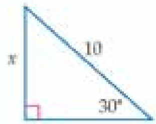
(9) 

(10) 

(11) **شاحنة :** ترتفع مؤخرة شاحنة بمقدار 3ft عن سطح الأرض. ما طول سطح مائل يمكن وضعه على مؤخرة الشاحنة بحيث تكون زاوية ارتفاعه عن سطح الأرض °20 ؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

مثال 1

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x.



$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ دالة الجيب

$\sin 30° = \frac{x}{10}$ بالتعويض

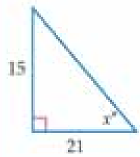
$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$ $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\frac{10}{2} = x$ بضرب الطرفين في 10

$5 = x$ بالتبسيط

مثال 2

أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



$\tan x° = \frac{15}{21}$ $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\tan^{-1}\frac{15}{21} = x$ معكوس دالة الظل

$35.5 \approx x$ باستعمال الآلة الحاسبة

8-2 الزوايا وقياساتها (ص 169-164)

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

(12) $215°$ (13) $\frac{5\pi}{2}$

(14) -3π (15) $-315°$

في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية من الزوايا المعطاة:

(16) $265°$ (17) $-65°$ (18) $\frac{7\pi}{2}$

(19) **دراجة هوائية :** إطار دراجة هوائية يدور 8 دورات في الدقيقة. إذا كان طول نصف قطر الإطار 15in. فأوجد قياس الزاوية θ التي يدورها الإطار في ثانية واحدة بالراديان.

مثال 3

حول القياس °160 إلى قياس بالرديان.

$$160° = 160°\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$$

$$\frac{160\pi}{180} \text{ rad} = \frac{8\pi}{9}$$

مثال 4

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية °150.

زاوية بقياس موجب:

$150° + 360° = 510°$ بجمع °360

زاوية بقياس سالب:

$150° - 360° = -210°$ بطرح °360

8-3 الدوال المثلثية للزوايا ص 176-171

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

20) $\cos 135°$ 21) $\tan 150°$

22) $\sin 2\pi$ 23) $\cos \frac{3\pi}{2}$

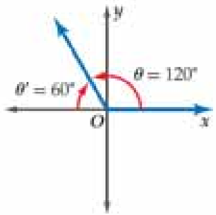
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بنقطة من النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ .

24) $(-4, 3)$ 25) $(5, 12)$ 26) $(16, -12)$

27) **كرة:** قذفت كرة من حافة سطح بناية بزاوية قياسها °70، وبسرعة ابتدائية مقدارها 5m/sec. المعادلة التي تُمثّل المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة هي: $x = v_0(\cos\theta)t$، حيث: v_0 هي السرعة الابتدائية، θ هي قياس الزاوية التي قذفت فيها الكرة، t هو الزمن (بالثواني). ما المسافة الأفقية التقريبية التي تقطعها الكرة بعد مرور 10 ثوانٍ.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 120°$.



بما أن ضلع الانتهاء للزاوية °120 يقع في الربع الثاني، فإن قياس الزاوية المرجعية θ هو $180° - 120° = 60°$.

دالة الجيب موجبة في الربع الثاني، إذن: $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

مثال 6

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة (6, 5). فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ.

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{6\sqrt{61}}{61} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{61}}{5} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{6}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{6}{5} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{61}}{6}$$

8-4 قانون الجيوب ص 183-177

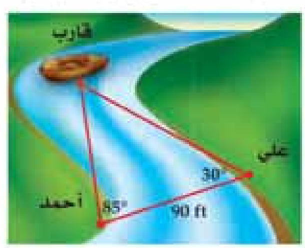
حدّد إذا كان للمثلث في كلٍّ مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

28) $C = 118°, c = 10, a = 4$

29) $A = 25°, a = 15, c = 18$

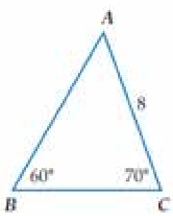
30) $A = 70°, a = 5, c = 16$

31) **قوارب:** يقف علي وأحمد على جانبي نهر. كم يبعد علي عن القارب؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.



مثال 7

حُلّ $\triangle ABC$.



أولًا أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$60° + 70° + A = 180°, A = 50°$

استعمل الآن قانون الجيوب لإيجاد قيمتي a, c.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 70°}{c} \qquad \frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 50°}{a}$$

$$c = \frac{8\sin 70°}{\sin 60°} \approx 8.7 \qquad a = \frac{8\sin 50°}{\sin 60°} \approx 7.1$$

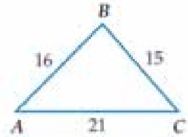
إذن، $A = 50°, c \approx 8.7, a \approx 7.1$.

الفصل
8 دليل الدراسة والمراجعة

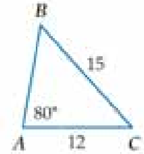
8-5 قانون جيوب التمام ص 189–185

حدد الطريقة الأنسب للبدء في حل كل من المثلثات الآتية (قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام) ثم حُلّ كل مثلث منها مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

32)



33)



34) $C = 75°, a = 5, b = 7$

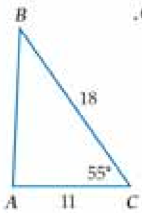
35) $A = 42°, a = 9, b = 13$

36) $b = 8.2, c = 15.4, A = 35°$

37) **زراعة** يريد مزارع وضع سياج لقطعة أرض مثلثة الشكل. طولا ضلعيها 120 ft ,325 ft، وقياس الزاوية المحصورة بينهما 70°. فما طول السياج الذي تحتاجه؟

مثال 8

حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه $C = 55°, b = 11, a = 18$.



معطى في السؤال طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. ابدأ برسم المثلث واستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قيمة c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$c^2 = 18^2 + 11^2 - 2(18)(11)\cos 55°$$

$$c^2 \approx 217.9$$

$$c \approx 14.8$$

ثم، استعمل قانون الجيوب لإيجاد قياس الزاوية A.

$$\frac{\sin A}{18} \approx \frac{\sin 55°}{14.8}$$

$\sin A \approx \frac{18 \sin 55°}{14.8}$ ؛ إذن $A \approx 85.0°$

قياس الزاوية B يساوي تقريبًا $180 - (85.0 + 55) = 40.0°$.

إذن، $c \approx 14.8, A \approx 85.0°, B \approx 40.0°$.

8-6 الدوال الدائرية ص 195–190

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

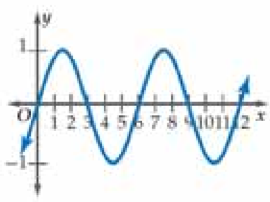
38) $\cos(-210°)$

39) $(\cos 45°)(\cos 210°)$

40) $\sin -\frac{7\pi}{4}$

41) $\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$

42) أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانيًا في الشكل أدناه:



43) طول قطر إطار دائري 18 in، ويدور 4 دورات في الدقيقة الواحدة. ما طول دورة الدالة التي تُمثّل ارتفاع نقطة تقع على الحافة الخارجية للإطار كدالة في الزمن؟

مثال 9

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 510°$.

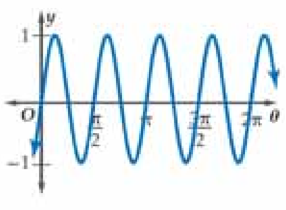
$$\sin 510° = \sin(360° + 150°)$$

$$= \sin 150°$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال 10

أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانيًا في الشكل أدناه:



يبدأ النمط بالتكرار عند $\frac{\pi}{2}$، π، وهكذا... ولذلك طول الدورة هو $\frac{\pi}{2}$

8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا ص 201–196

أوجد السعة، (إن كانت معرّفة)، وطول الدورة للدوال الآتية، ثم مثّل كلًا منها بيانيًا:

(44 $y = 4 \sin 2\theta$ **(45** $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

(46 $y = 3 \csc \theta$ **(47** $y = 3 \sec \theta$

(48 $y = \tan 2\theta$ **(49** $y = 2 \csc \frac{1}{2}\theta$

(50 قفز لاعب على جهاز الاهتزاز، فاهتز الجهاز بتردد قدره 10 هيرتز. إذا كانت السعة تساوي 5 ft، فاكتب دالة جيب تُمثّل الارتفاع y في اهتزاز الجهاز كدالة في الزمن t.

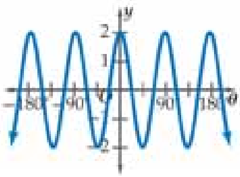
مثال 11

أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 2 \cos 4\theta$. ثم مثّل هذه الدالة بيانيًا.

السعة: $|a| = |2| = 2$. لذلك فالتمثيل البياني للدالة تكون له قيمة عظمى هي 2 وقيمة صغرى هي -2.

وطول الدورة:

$$\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|4|} = 90^\circ$$



8-8 الدوال المثلثية العكسية ص 206–202)

أوجد قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان في كل ممّا يأتي:

(51 $\text{Sin}^{-1}(1)$ **(52** $\text{Arctan}\,(0)$

(53 $\text{Arcsin}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(54** $\text{Cos}^{-1}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

(55 $\text{Tan}^{-1}\,1$ **(56** $\text{Arccos}\,0$

(57 **منحدرات:** منحدر ارتفاعه 5 أقدام وطوله 10 أقدام كما يظهر في الشكل أدناه. اكتب دالة مثلثية عكسية، يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية θ التي يصنعها المنحدر مع الأرض الأفقية ثم أوجد قياس هذه الزاوية.

أوجد قيمة كل ممّا يأتي مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

(58 $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

(59 $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\,0\right)$

حُلّ كلًا من المعادلات الآتية مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك.

(60 $\text{Tan}\,\theta = -1.43$

(61 $\text{Sin}\,\theta = 0.8$

(62 $\text{Cos}\,\theta = 0.41$

مثال 12

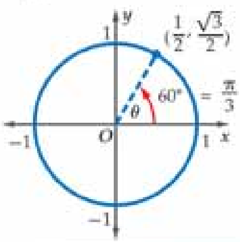
أوجد قياس الزاوية $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$. واكتبه بالدرجات وبالراديان.

أوجد الزاوية θ حيث $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ بحيث يكون جيب تمامها $\frac{1}{2}$.

استعمل دائرة الوحدة.

أوجد نقطة على دائرة الوحدة، بحيث يكون الإحداثي x لها $\frac{1}{2}$ بما أن: $\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{2}$ عندما $\theta = 60^\circ$

إذن، $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.



مثال 13

أوجد قيمة $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right)$. مقرّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

استعمل الآلة الحاسبة.

[2nd] [SIN] [2nd] [TAN^{-1}] [1] [÷] [2] [ENTER] 0.4472135955

إذن، $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 0.45$.

مثال 14

إذا كان $\text{Cos}\,\theta = 0.72$، فأوجد θ.

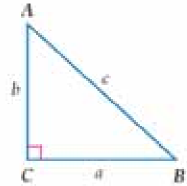
استعمل الآلة الحاسبة.

[2nd] [COS^{-1}] 0.72 [ENTER] 43.9455195623

إذن، $\theta \approx 43.9^\circ$.

اختبار الفصل

حُلّ $\triangle ABC$ في كل ممّا يأتي باستعمال القياسات الواردة. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



1) $A = 36°, c = 9$

2) $a = 12, A = 58°$

3) $a = 9, c = 12$

حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

4) $325°$

5) $-175°$

6) $\frac{9\pi}{4}$

7) $-\frac{5\pi}{6}$

8) حدد إذا كان للمثلث ABC الذي فيه $A = 110°, a = 16,$ $b = 21$. حل واحد أم حلان أم ليس له حل.ثم أوجد الحلول (إن أمكن)، مقربًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي (في السؤال 14، اكتب الزاوية بالدرجات):

9) $\cos(-90°)$

10) $\sin 585°$

11) $\cot \frac{4\pi}{3}$

12) $\sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$

13) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

14) $\text{Arccos}\,\frac{1}{2}$

15) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ فأوجد كلًّا من: $\cos\theta, \sin\theta$.

16) **اختيار من متعدد،** أيٌّ من الزوايا الآتية يكون الجيب والظل لها سالبين؟

A $65°$

B $310°$

C $120°$

D $265°$

أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين. ثم مثّل الدالتين بيانيًّا:

17) $y = 2\sin 3\theta$

18) $y = \frac{1}{2}\cos 2\theta$

19) **اختيار من متعدد** طول دورة الدالة $y = 3\cot\theta$ يساوي:

A $120°$

B $180°$

C $360°$

D $1080°$

20) حدّد الطريقة الأنسب التي تبدأ بها لحل $\triangle XYZ$ (قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام)، الذي فيه: $X = 105°, z = 9, y = 15$، ثم حُلّ المثلث مقربًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

21) **سواق** عجلة ساقية طول قطرها 20 ft، تكمل دورة كاملة في 45 ثانية. افترض أن ارتفاع أعلى العجلة يُمثّل الارتفاع عند الزمن 0. اكتب دالة تُمثّل ارتفاع النقطة h في الشكل أدناه كدالة في الزمن t. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

الفصل 8

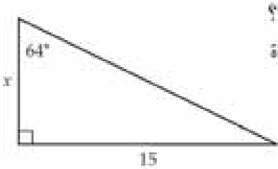
اختبار تراكمي

للفصول 1-8

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل ممّا يأتي:

1) ما قيمة x في الشكل المجاور؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.



A 6.5

B 6.9

C 7.1

D 7.3

2) ما طول الدورة في التمثيل البياني للدالة: $y = 3\cos 4\theta$ ؟

A $90°$

B $180°$

C $270°$

D $360°$

3) تتكون مجموعة حل المعادلة $\sqrt{8x+1} - 4 = 1 - 2x$ من:

A عددان صحيحان موجبان

B عدد صحيح موجب فقط

C عددين صحيحين أحدهما موجب والآخر سالب

D ليس لها حلول حقيقية

4) ما القيمة الدقيقة لـ $\sin 240°$؟

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) المقدار $i^{53} + i^{51} + i^{50}$ يساوي:

A i

B $-i$

C -1

D 0

6) ما قيمة m في المثلث MNO الذي فيه: $n = 12.4\text{ cm}, M = 35°, N = 74°$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

A 7.4 cm

B 8.5 cm

C 14.6 cm

D 35.9 cm

7) أوجد قيمة المحددة: $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

A -144

B -72

C 72

D 144

8) إذا كان $(x + 1)$ عاملًا لكثيرة الحدود $P(x) = x^3 + Kx^2 + 2Kx - 2$ فإن قيمة K تساوي:

A 6

B $\frac{1}{3}$

C -3

D 3

9) ما باقي قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟

A -11

B 1

C -1

D 11

إجابة قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

10) تعتمد سرعة موجة المد (تسونامي) s على معدّل عمق مياه البحر. إذا علمت أن الصيغة الآتية تُمثّل سرعة المد عندما يكون عمق الماء d كيلومترًا، $s = 356\sqrt{d}$، وإذا علمت أن موجة المد (تسونامي) تسير بسرعة 145 km/h فما معدل عمق الماء؟ قرب الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

11) أوجد معكوس $g(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$.

12) يحتاج الحصان إلى 10 أرطال من العشب كل يوم كي يكون في صحة جيدة.

a) اكتب صيغة تمثّل الكمية اللازمة من العشب لإطعام x حصان مدة d يومًا.

b) هل الصيغة التي وضعتها صيغة تُمثّل تغيُّرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًا؟ فسّر إجابتك.

c) ما الكمية التي تحتاج إليها ثلاثة أحصنة خلال أسبوع؟

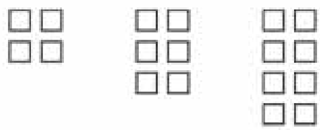
13) إذا كان $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، فأوجد قيمة $(f \circ g)(\frac{11}{2})$.

14) إذا كان $C = AB$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد قيمة العنصر C_{32} (العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني من C).

15) يتكرّر نمط المربعات أدناه إلى ما لانهاية من خلال إضافة مربعات جديدة. ما عدد المربعات في الخطوة رقم 10؟



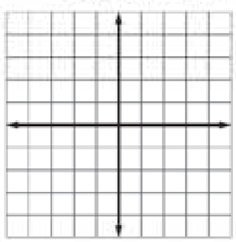
الخطوة 3 الخطوة 2 الخطوة 1

إجابة طويلة

أجب عن كل مما يأتي موضحًا خطوات الحل :

16) إذا كان $f(x) = -|x+4| + 3$.

a) مثّل الدالة $f(x)$ بيانيًا .



b) حدد مجال الدالة ومداها .

c) أوجد المقاطع للمحاور x، y .

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟																
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
فعد إلى الدرس ...	8-1	8-7	4-7	8-3	3-1	8-4	2-4	3-7	3-4	4-3	4-2	5-5	4-1	2-3	6-2	1-3

الصيغ

الهندسة الإحداثية في المستوى

نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$,
المسافة	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$
الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثانية	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
الضرب بثابت	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثالثة (قاعدة الأقطار)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$
مساحة مثلث رؤوسه $(a,b),(c,d),(e,f)$	$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
مربع المجموع	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
مربع الفرق	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
مكعب المجموع	$(a+b)^3 = a^3 b + 3b^2 a + 3ab^2 + b^3$
حاصل ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما	$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
مكعب الفرق	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

الإحصاء والاحتمال

$$n! = n(n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

المتتابعات والمتسلسلات

الحد النوني في المتتابعة الجبرية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
الحد النوني في المتتابعة الهندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
مجموع حدود المتسلسلة الجبرية المنتهية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ or $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$
مجموع حدود المتسلسلة الهندسية المنتهية	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ or $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع حدود المتسلسلة الهندسية غير المنتهية	$S = \frac{a_1}{1 - r}, \lvert r \rvert < 1$

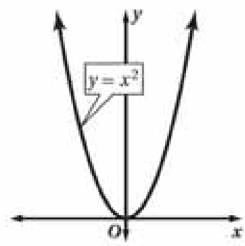
الصيغ

حساب المثلثات

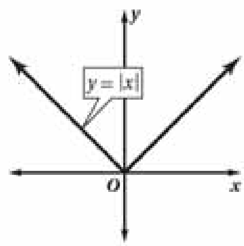
قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$		
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
الدوال المثلثية	$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
	$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
متطابقات مثلثية	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

الدوال الرئيسة (الأم)

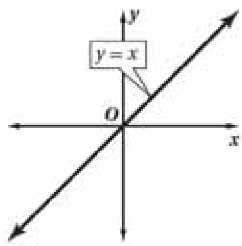
الدوال التربيعية



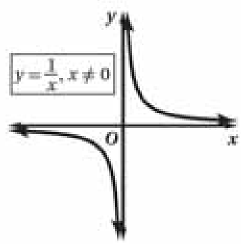
دوال القيمة المطلقة



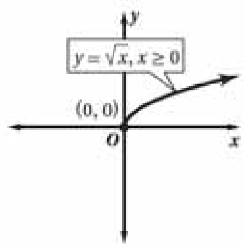
الدوال الخطية



المقلوب والدوال النسبية



دوال الجذر التربيعي



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة A	A^{-1}
النظير الجمعي للمصفوفة A	$-A$
مصفوفة الوحدة	I
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
الحدث المتمم	A'
احتمال الحدث A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B \mid A)$
تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$Sin(x)$
دالة جيب التمام	$Cos(x)$
دالة الظل	$Tan(x)$
دالة مقلوب الظل	$\mathrm{Cot}(x)$
دالة مقلوب الجيب	$\mathrm{Csc}(x)$
دالة مقلوب جيب التمام	$\mathrm{Sec}(x)$
معكوس دالة Sin	$\mathrm{Sin}^{-1}\, x$
معكوس دالة Cos	$\mathrm{Cos}^{-1}\, x$
معكوس دالة Tan	$\mathrm{Tan}^{-1}\, x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة متعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \|x\|$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [\![x]\!]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	i
تركيب الدالتين f و g	$[f \circ g](x)$
معكوس الدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\mathrm{A}_{m \times n}$
العنصر في الصف i العمود j من المصفوفة A	a_{ij}
محددة المصفوفة A	$\|\mathrm{A}\|$